$x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$

$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$

Notação alternativa: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \in \mathbb{R}^n$

$v^T \cdot u = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \langle u, v \rangle$

Uma <u>combinação linear</u> dos $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$

$\underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m}_{\in V}$, onde $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$.

<u>Exemplos:</u> 1) $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (1,1) \in \mathbb{R}^2$

$2(1,0) + 3(1,1) = (2,0) + (3,3) = (5,3)$

$(-1)(1,0) + 0(1,1) = (-1,0) + (0,0) = (-1,0)$

} são comb. lineares de v_1 e v_2

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$

$3A - B = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Uma combinação linear nula é uma combinação linar que resulta no vetor nulo.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_n = \vec{0}$$

Exemplos: 1) $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,-1)$

$$1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = (1,1) + (-1,-1) = (0,0)$$

$$2 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 = (0,0)$$

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = (0,0)$$

2) $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,0)$

$$0 \cdot (1,0) + k \cdot (0,0) = (0,0), \quad k \in \mathbb{R}$$

3) $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$

$$a(1,0) + b(0,1) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow (a,0) + (0,b) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow (a,b) = (0,0) \Leftrightarrow a = 0, \ b = 0$$

Um conjunto de vetores é dito linearmente independente (LI) quando a única combinação linear nula é que tem todos os coeficientes nulos. Quando o conj. de

vetores não é LI, dizemos que ele é linearmente dependente (LD).

Exemplos: 1) $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (2,4)$

$$a(1,2) + b(2,4) = (0,0) \Rightarrow (a,2a) + (2b,4b) = (0,0)$$

$$\Rightarrow (a+2b, 2a+4b) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} a+2b=0 \\ 2a+4b=0 \end{cases} \xrightarrow{(\div 2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a+2b=0 \Rightarrow \boxed{a=-2b.} \quad \text{(inf. sol.)}$$

$b=3$, $a=-6$: $-6(1,2) + 3(2,4) = (-6,-12) + (6,12) = (0,0)$

Assim, $\{(1,2),(2,4)\}$ é LD.

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=b=0} \quad \text{(sol. única)}$$

Portanto, $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ é LI.

3) $\{(x,y), (kx,ky)\}$, $k \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ ou $y \neq 0$

(v, kv, $v \in V$, $v \neq \vec{0}$)

$a(x,y) + b(kx,ky) = (0,0) \Leftrightarrow a(x,y) + bk(x,y) = (0,0)$

$\Leftrightarrow (a+bk)\cdot \underbrace{(x,y)}_{\neq (0,0)} = (0,0) \Leftrightarrow a + bk = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -kb}$

4) $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ é LI. De fato,

$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c) = (0,0,0) \Rightarrow (a,b,c) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \boxed{a = b = c = 0}$

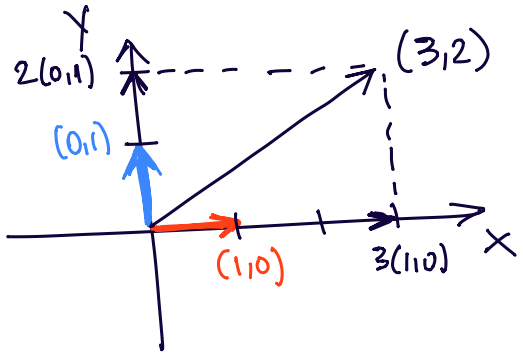
Teorema: Um conjunto com apenas dois é LD se, e somente se, os vetores são múltiplos.

O conjunto gerado por $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ é o conjunto de vetores resultante de todas as comb. lineares dos elementos de S.

Exemplos: 1) $S = \{(1,0), (0,1)\}$

$a(1,0) + b(0,1) = (a,0) + (0,b) = (a,b)$, $a, b \in \mathbb{R}$

O conj. gerado por S é $\mathbb{R}^2$.



$3(1,0)+2(0,1)=(3,0)+(0,2)=(3,2)$.

$(6,7)=6(1,0)+7(0,1)$

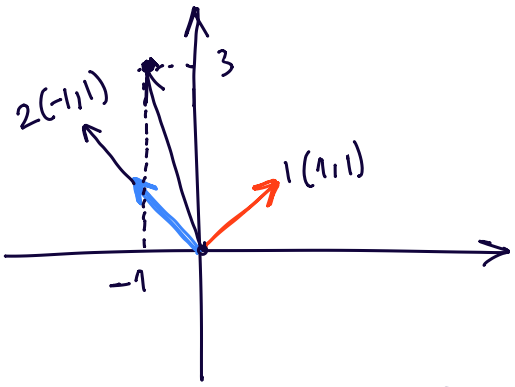
2) $\{(1,1),(-1,1)\}$

$a(1,1)+b(-1,1)=(a,a)+(-b,b)=(a-b,a+b)$

$a=2,\ b=5:\ (2-5,2+5)=(-3,7)$

$a=3,\ b=6:\ (3-6,3+6)=(-3,9)$

$a=1,\ b=2:\ (1-2,1+2)=(-1,3)$



$1(1,1)+2(-1,1)=(1,1)+(-2,2)$

$=(-1,3)$

Dado $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, é possível obter $a,b\in\mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} a-b=x_0 \\ a+b=y_0 \end{cases} \quad ?$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1\cdot 1-(-1)\cdot 1 = 2\neq 0$$ ∴ o sist. tem sol. única p/ quaisquer $x_0,y_0\in\mathbb{R}$

Assim, o conj. $\{(1,1),(-1,1)\}$ gera $\mathbb{R}^2$.

$(2,3)=\underline{a}(1,1)+\underline{b}(-1,1) \iff \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=3 \end{cases}$