(1) Se **u** e **v** são objetos em V então **u** + **v** é um objeto em V. ✓
(2) **u** + **v** = **v** + **u** ✓
(3) **u** + (**v** + **w**) = (**u** + **v**) + **w** ✓
(4) Existe um objeto **0** em V, chamado um ***vetor nulo*** ou ***vetor zero*** de V, tal que **0** + **u** = **u** + **0** = **u** para cada **u** em V. ✓
(5) Para cada **u** em V, existe um objeto – **u**, chamado um ***negativo*** de **u**, tal que **u** + (– **u**) = (– **u**) + **u** = **0**. ✓
(6) Se k é qualquer escalar e **v** é um objeto em V, então k**v** é um objeto em V. ✓
(7) $l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$ ✓
(8) $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$ ✓
(9) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$ ✓
(10) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ ✗

$V, +, \cdot$

Exemplo: $\mathbb{R}^2, +, \odot$

$(x,y) + (a,b) = (x+a, y+b)$

$k \odot (x,y) = (kx, 0)$

não é espaço vetorial!

6) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{R}$

$k \odot (x,y) = (kx, 0) \in \mathbb{R}^2$

7) $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $l \in \mathbb{R}$

$l \odot (u+v) = l \odot (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (l(u_1 + v_1), 0)$

$l \odot u = l \odot (u_1, u_2) = (l u_1, 0)$
$l \odot v = l \odot (v_1, v_2) = (l v_1, 0)$
$\Rightarrow l \odot u + l \odot v = (l u_1 + l v_1, 0)$

8) $k, l \in \mathbb{R}$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

$(k+l) \odot v = (k+l) \odot (v_1, v_2) = ((k+l) v_1, 0)$

$k \odot v = k \odot (v_1, v_2) = (k v_1, 0)$
$l \odot v = l \odot (v_1, v_2) = (l v_1, 0)$
$\Rightarrow k \odot v + l \odot v = (k v_1 + l v_1, 0)$

9) $l, k \in \mathbb{R}$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$

$k \odot (l \odot u) = k \odot (l u_1, 0) = (k l u_1, 0)$

$(kl) \odot u = ((kl) u_1, 0)$

10) $1 \odot u = 1 \odot (u_1, u_2) = (1 \cdot u_1, 0) = (u_1, 0) \neq (u_1, u_2)$

Subespaços vetoriais

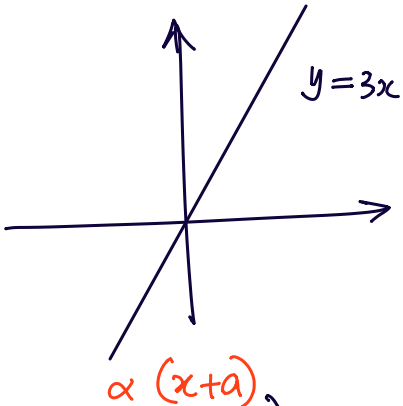
Um subespaço vetorial do espaço vetorial V é um subconjunto W não-vazio de V tal que dados $u, v \in W$ e $k \in \mathbb{R}$, temos $u+v \in W$ e $ku \in W$, onde $+, \cdot$ são as op. de V. W é um espaço vetorial.

Exemplos: 1) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2$

2) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{\vec{0}\}$, $\{\vec{0}\} \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{0} = (0,0)$

$\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in W$, $k \cdot \vec{0} = \vec{0} \in W$

3) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x,y) \mid y = 3x\}$ ($y = \alpha x$)



$(x,y) \in W \Leftrightarrow (x, 3x)$ (αx)

$(a,b) \in W \Leftrightarrow (a, 3a)$ (αa)

$(x, 3x) + (a, 3a) = (x+a, 3x+3a) = (x+a, 3(x+a)) \in W$ (αx, αa, $\alpha(x+a)$)

$k(x, 3x) = (kx, 3kx) \in W$ (αx, αkx)

W é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

$W = \{(x,y) \mid x = 0\}$

$W = \{(x,y) \mid y = \alpha x\}$

Qualquer reta que passa pela origem é subespaço de $\mathbb{R}^2$

4) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$, $\{\vec{0}\}$, retas passando pela origem, planos passando pela origem são todos os subespaços de $\mathbb{R}^3$

5) $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore Ax = 0$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{c}{a} L_1} \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow aL_2} \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & ad-bc & 0 \end{bmatrix}$$

Se $\det(A) = ad - bc \neq 0$, então $\text{posto}(A) = 2$, $\text{posto}(A|b) = 2$ e como temos 2 variáveis, o sistema tem sol. única.

Se $\det(A) = ad - bc \neq 0$, então $\text{posto}(A) = 1$, $\text{posto}(A|b) = 1$ e ambos menos que o número de variáveis, o sistema tem inf. sol.

Dessa forma, um sist. homogêneo sempre tem sol.

Seja $W \subset \mathbb{R}^2$ o conj. das sol. de um sist. homogêneo.

$u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in W$, $u + v \in W$ ✓

$Au = 0$, $Av = 0$, $A(u+v) = 0$? ✓

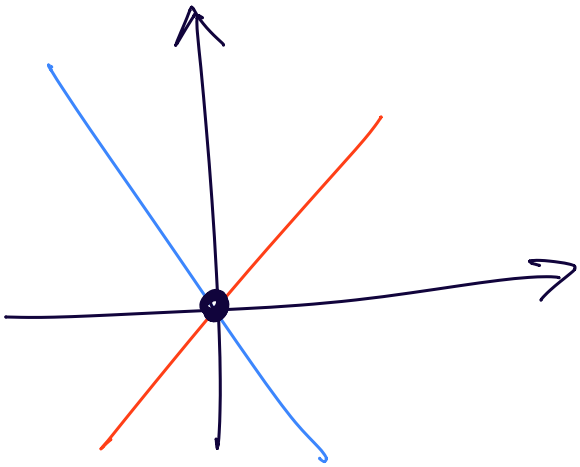
$A(u+v) = Au + Av = 0 + 0 = 0$

$k \in \mathbb{R}$, $u \in W$, $ku \in W$? ✓

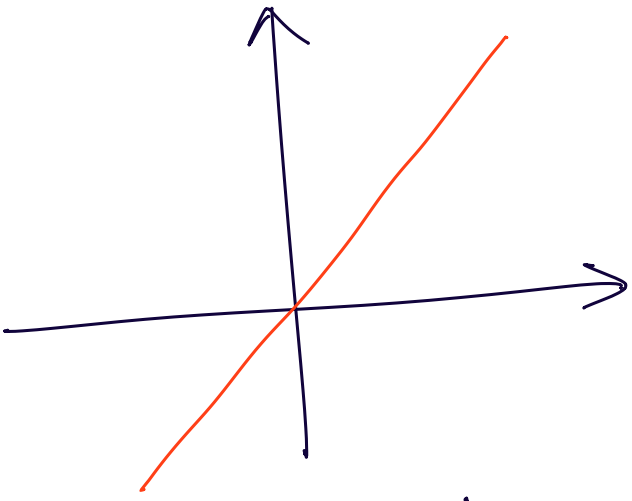
$Au = 0$, $A(ku) = 0$? ✓

$A(ku) = k(Au) = k0 = 0$

Portanto, W é subespaço de $\mathbb{R}^2$.



$\{(0,0)\}$



$ax + by = 0$

$y = -\frac{ax}{b}$