Espaço vetorial

Dado um conjunto não-vazio com uma operação de soma entre seus elementos e uma operação de produto por escalar, se forem satisfeitas as propriedades abaixo, dizemos que este conj. com essas operações é um espaço vetorial.

(1) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são objetos em V então $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é um objeto em V.
(2) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
(3) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
(4) Existe um objeto $\mathbf{0}$ em V, chamado um ***vetor nulo*** ou ***vetor zero*** de V, tal que $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ para cada $\mathbf{u}$ em V.
(5) Para cada $\mathbf{u}$ em V, existe um objeto $-\mathbf{u}$, chamado um ***negativo*** de $\mathbf{u}$, tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
(6) Se k é qualquer escalar e $\mathbf{v}$ é um objeto em V, então $k\mathbf{v}$ é um objeto em V.
(7) $l(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = l\mathbf{u} + l\mathbf{v}$
(8) $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$
(9) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
(10) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Exemplos: 1) $\mathbb{R}, +, \cdot$

$x, y, z \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$

$x + y$, $k \cdot x$

$x + 0 = x$

$x + (-x) = 0$

2) $M_{2\times 2}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix}_{2\times 2} \in M_{2\times 2}$$

$$k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}_{2\times 2} \in M_{2\times 2}$$

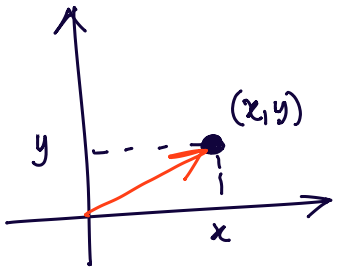
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

↖ matriz nula

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↖ A ↖ −A

3) $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$



$(x,y)+(a,b) = (x+a, y+b) \in \mathbb{R}^2$

$k(x,y) = (kx, ky) \in \mathbb{R}^2$

$(x,y)+(a,b) = (x+a, y+b) = (a+x, b+y) = (a,b)+(x,y)$

↑ núm reais ↑

$(x,y)+(0,0) = (x,y)$, $(x,y)+(-x,-y) = (0,0)$

↑ vetor nulo ↑ simétrico aditivo

4) $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \in \mathbb{R}^n$

$k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) \in \mathbb{R}^n$

$0 = \vec{0} = (0,0,\ldots,0)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$

↑ vetor nulo ↑ simétrico aditivo de x

$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

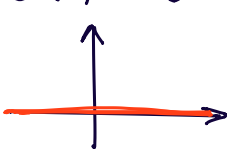
5) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$

$\mathcal{F}(x)$ = conj. das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(kf)(x) = k f(x)$

$(-f)(x) = -f(x)$

$0(x) = 0$



6) $P_n(x)$ = polinômios de grau $\leq n$.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{x^2+2x+3}_{\substack{p(x)\\ \text{grau 2}}} + \underbrace{-x^2+2x+3}_{\substack{q(x)\\ \text{grau 2}}} = \underbrace{4x+6}_{\text{grau 1}} \in P_2(x)$$

Assim, o conjunto dos polinômios de grau exatamente n não é espaço vetorial.

Apesar da natureza distinta dos conjuntos, todos compartilham a mesma estrutura algébrica de espaço vetorial.

Produto interno: $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Propriedades:

1) $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

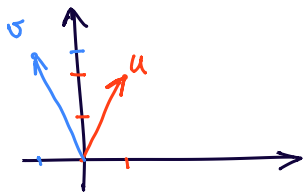
$$\langle u, u \rangle = \underbrace{u_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{u_2^2}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{u_n^2}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\langle 0, 0 \rangle = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u_1^2 = u_2^2 = \cdots = u_n^2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0.$$

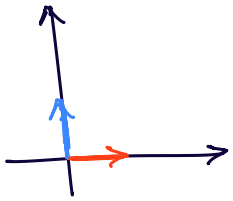
2) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (comutatividade)

Exemplos: 1) $u = (1,2)$, $v = (-1,3)$



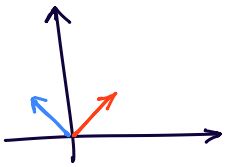
$\langle u, v \rangle = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = -1 + 6 = 5$

2) $u = (1,0)$, $v = (0,1)$



$\langle u, v \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

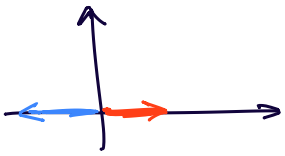
$u = (1,1)$, $v = (-1,1)$



$\langle u, v \rangle = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$

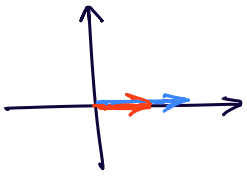
parece que o produto interno tem relação com o ângulo entre os vetores...

$u = (1,0)$, $v = (-1,0)$



$\langle u, v \rangle = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = -1$

$u = (1,0)$, $v = (2,0)$



$\langle u, v \rangle = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 2$

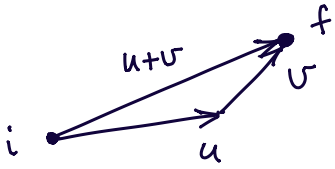
Norma: $u \in \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ (comprimento de u)

Propriedades:

1) $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdade triangular)



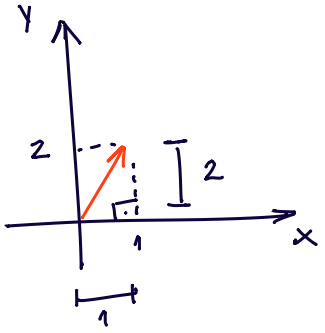
3) $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$

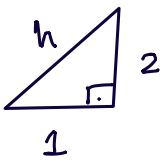
4) $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

Exemplos: 1) $u = (1,2)$

$\langle u,u \rangle = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 = 1+4 = 5$

$\|u\| = \sqrt{5}$





Pitágoras:

$h^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

$\Rightarrow h = \sqrt{5}$.

2) $u = (1,1,1)$

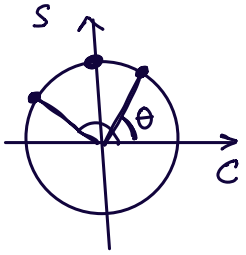
$\langle u,u \rangle = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \quad \Rightarrow \|u\| = \sqrt{3}$

3) $u = (1,2,-1,4)$

$\langle u,u \rangle = 1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 4^2 = 1+4+1+16 = 22 \quad \Rightarrow \|u\| = \sqrt{22}$.

De fato, o produto interno tem relação com o ângulo entre dois vetores. Se $\theta \in [0,\pi]$ é o ângulo entre u e v, temos:

$$\langle u,v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta.$$



$$\cos\theta = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$\|u\| \geq 0$, $\|v\| \geq 0$

$\theta < 90°$

$\cos\theta > 0$

$\theta = 90°$

$\cos\theta = 0$

$\theta > 90°$

$\cos\theta < 0$