Sistemas Lineares

Prof. Adriano Barbosa

19/08/2026

Equações Lineares

Uma equação linear é uma equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as variáveis, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os coeficientes das variáveis e b é o coeficiente independente.

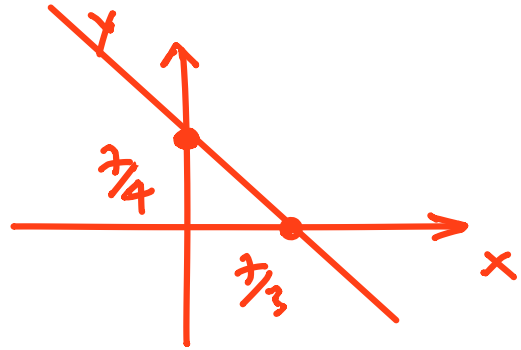
$3x + 2y - z = 0 \quad (x, y, z)$

$4a - 7b = -1 \quad (a, b)$

$\frac{4}{3}$

$-\alpha + \sqrt{2}\beta + e\gamma = 3 \quad (\alpha, \beta, \gamma)$

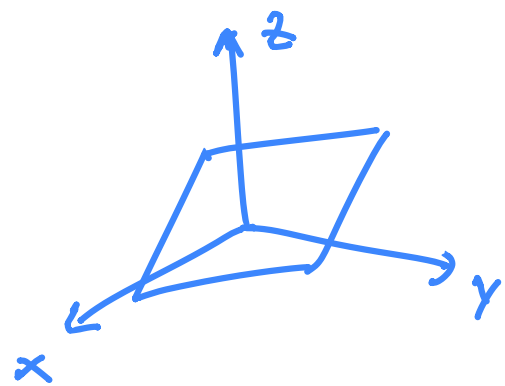
Equações Lineares



Exemplos

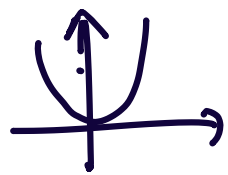
1. $3x + 4y = 7$ $\quad x=0,\ y=\frac{7}{4}\ :\ 3\cdot 0 + 4\cdot\frac{7}{4} = 7$
2. $2x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 0$
3. $z = 2x - y \Leftrightarrow 2x - y - z = 0$

4. $2x+3y+4z+7w=1$



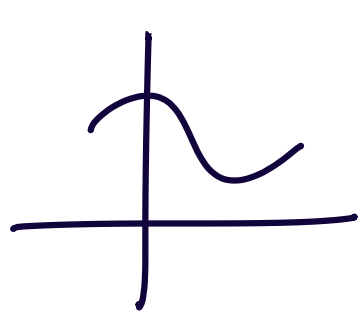
Não são lineares

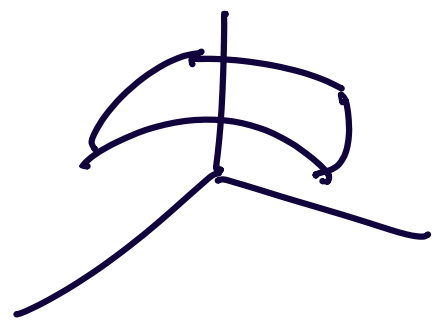
1. $x^2 - y = 0 \Leftrightarrow y = x^2$



2. $2x + 3y + xy = 0$
3. $\sqrt{y} - x = z$

$\cos x + 3y = 2$





Equações Lineares

Resolver uma equação linear significa encontrar os valores das variáveis que satisfazem a equação.

- $x = 1$ e $y = 1$ é uma solução de $3x + 4y = 7$

Equações Lineares

Resolver uma equação linear significa encontrar os valores das variáveis que satisfazem a equação.

- $x = 1$ e $y = 1$ é uma solução de $3x + 4y = 7$
- $x = \frac{7}{3}$ e $y = 0$ é outra solução de $3x + 4y = 7$

$3 \cdot \frac{7}{3} + \cancel{4 \cdot 0} = 7$

Equações Lineares

Resolver uma equação linear significa encontrar os valores das variáveis que satisfazem a equação.

- $x = 1$ e $y = 1$ é uma solução de $3x + 4y = 7$
- $x = \frac{7}{3}$ e $y = 0$ é outra solução de $3x + 4y = 7$
- $x = 0$ e $y = \frac{7}{4}$ é mais uma solução de $3x + 4y = 7$

$3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{7}{4} = 7$

Equações Lineares

De modo geral,

$$3x + 4y = 7 \Leftrightarrow 4y = 7 - 3x \Leftrightarrow y = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}x.$$

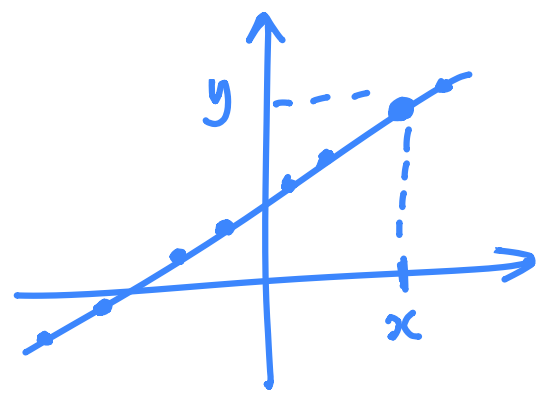
$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$

$y = ax + b$

$z = 2x - y + 4$

(plano)

$z = ax + by + c$



Equações Lineares

$3x+4y=7 \Rightarrow 3x = 7-4y \Rightarrow x = \frac{7-4y}{3}$

$y \in \mathbb{R}$, $x = \frac{7-4y}{3}$

De modo geral,

$y=-2 : x = \frac{7-4\cdot(-2)}{3} = \frac{15}{3} = 5 \quad \therefore (5,-2)$

$$3x + 4y = 7 \Leftrightarrow 4y = 7 - 3x \Leftrightarrow y = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}x.$$

Assim, qualquer par $x \in \mathbb{R}$ e $y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ será solução da equação $3x + 4y = 7$.

$\left(5, -\frac{3}{4}\cdot 5 + \frac{7}{4}\right) = \left(5, -\frac{8}{4}\right) = (5,-2)$

$\left(\sqrt{2}, -\frac{3}{4}\cdot\sqrt{2} + \frac{7}{4}\right)$

$\left(-\log 2, \frac{3}{4}\log 2 + \frac{7}{4}\right)$

Equações Lineares

De modo geral,

$$3x + 4y = 7 \Leftrightarrow 4y = 7 - 3x \Leftrightarrow y = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}x.$$

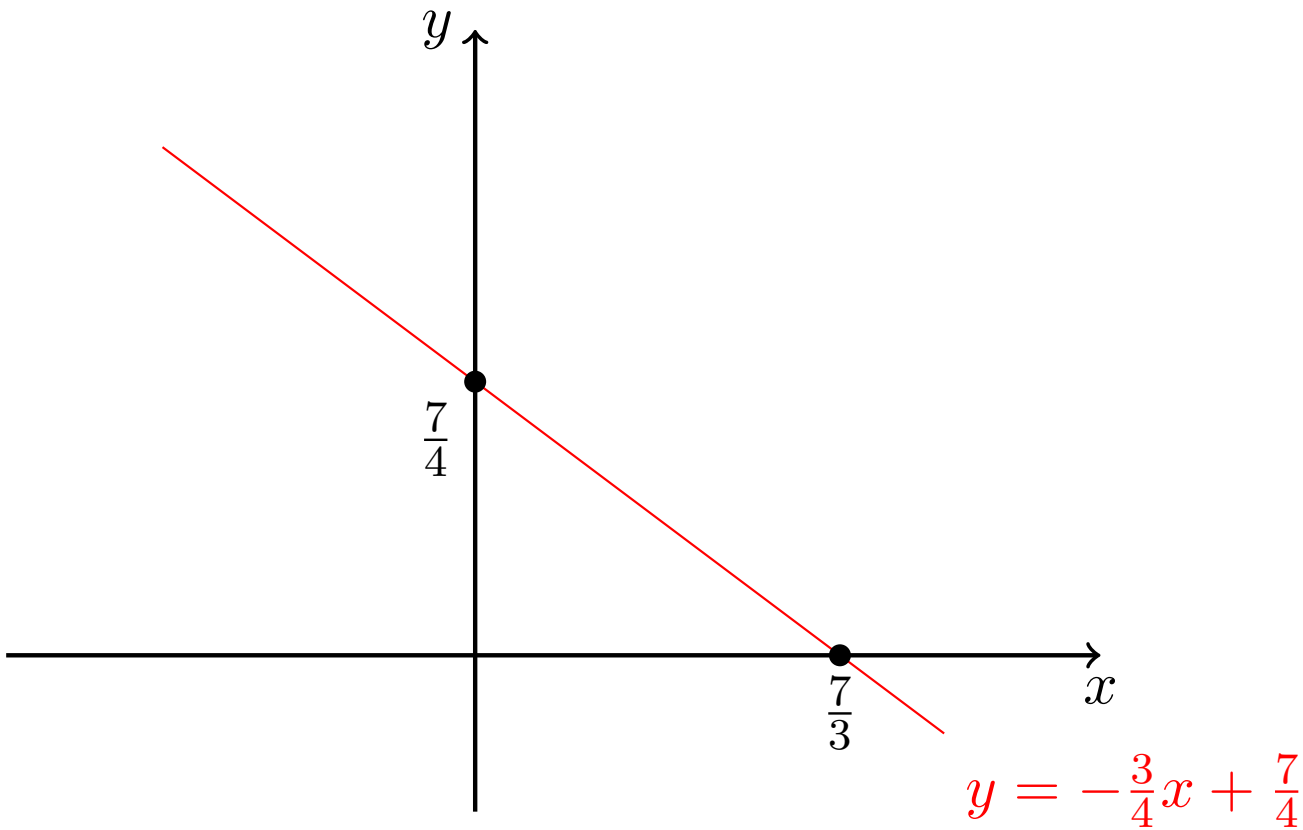
Assim, qualquer par $x \in \mathbb{R}$ e $y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ será solução da equação $3x + 4y = 7$.

O conjunto de todas as soluções de uma equação linear é chamado de solução geral da equação.

$$\left\{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}\right\}$$

Equações Lineares

Geometricamente



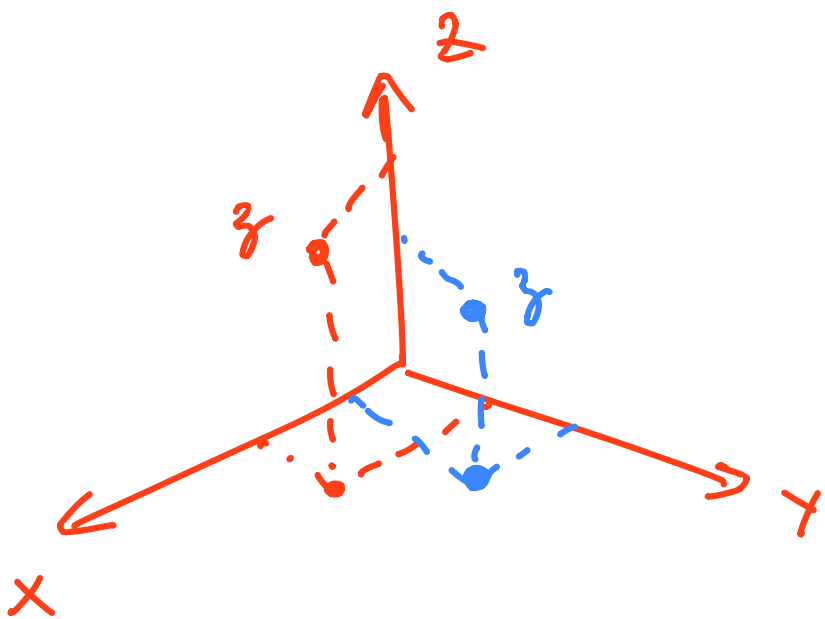
Equações Lineares

Encontre a solução geral de $3x - 2y + 2z = 1$.

Equações Lineares

Encontre a solução geral de $3x - 2y + 2z = 1$.

$$3x-2y+2z=1 \Leftrightarrow 2z=1-3x+2y \Leftrightarrow z=\frac{1-3x+2y}{2}, \forall x,y \in \mathbb{R}$$



Equações Lineares

Encontre a solução geral de $3x - 2y + 2z = 1$.

$$3x-2y+2z=1 \Leftrightarrow 2z=1-3x+2y \Leftrightarrow z=\frac{1-3x+2y}{2}, \forall x,y \in \mathbb{R}$$

ou

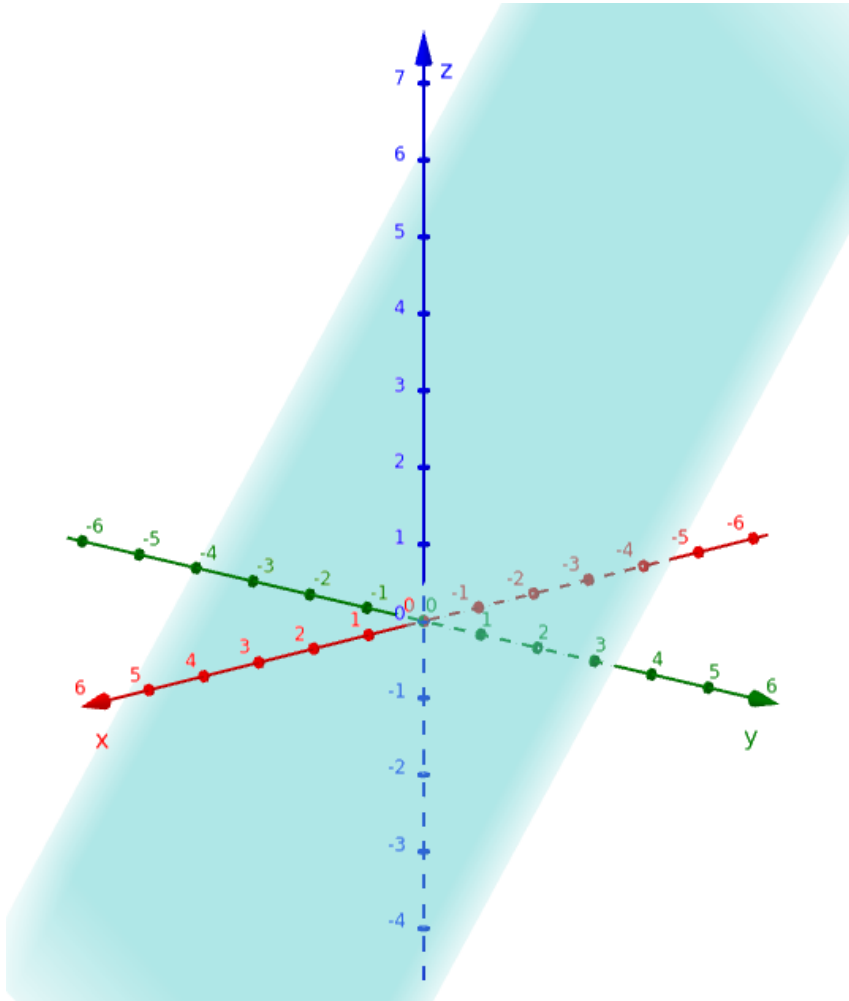
$$3x-2y+2z=1 \Leftrightarrow 2y=3x+2z-1 \Leftrightarrow y=\frac{3x+2z-1}{2}, \forall x,z \in \mathbb{R}$$

ou

$$3x-2y+2z=1 \Leftrightarrow 3x=1+2y-2z \Leftrightarrow x=\frac{1+2y-2z}{3}, \forall y,z \in \mathbb{R}$$

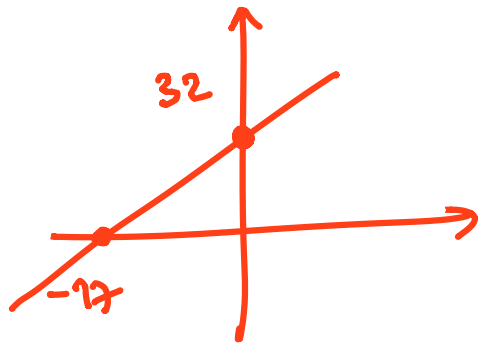
Equações Lineares

$$z = \frac{1 - 3x + 2y}{2}$$



Sistemas Lineares

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$



Um sistema linear é um conjunto de equações lineares.

Uma solução de um sistema linear é uma lista de valores das variáveis que seja solução de **todas** as equações.

x: qtd prod. vendidos

y: faturamento

z: custo

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ z = 2x \end{cases}$$

lucro: $y - z$

Sistemas Lineares

$$\begin{cases} 4x - y + 3z = -1 \\ 3x + y + 9z = -4 \end{cases}$$

$x = 1$, $y = 2$, $z = -1$ é uma solução do sistema, pois

$$4 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot (-1) = -1 \qquad 4 - 2 - 3 = -1$$

$$3 \cdot 1 + 2 + 9 \cdot (-1) = -4 \qquad 3 + 2 - 9 = -4$$

Sistemas Lineares

$$\begin{cases} 4x - y + 3z = -1 \\ 3x + y + 9z = -4 \end{cases}$$

$x = 1$, $y = 2$, $z = -1$ é uma solução do sistema, pois

$$4 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot (-1) = -1$$

$$3 \cdot 1 + 2 + 9 \cdot (-1) = -4$$

Mas, $x = 1$, $y = 8$ e $z = 1$ não é solução do sistema

$$4 \cdot 1 - 8 + 3 \cdot 1 = -1 \qquad 4 - 8 + 3 = -1$$

$$3 \cdot 1 + 8 + 9 \cdot 1 = 20 \neq -4 \qquad 3 + 8 + 9 > 0$$

Sistemas Lineares

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

Soluções gerais:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$y = 4x - 7$$

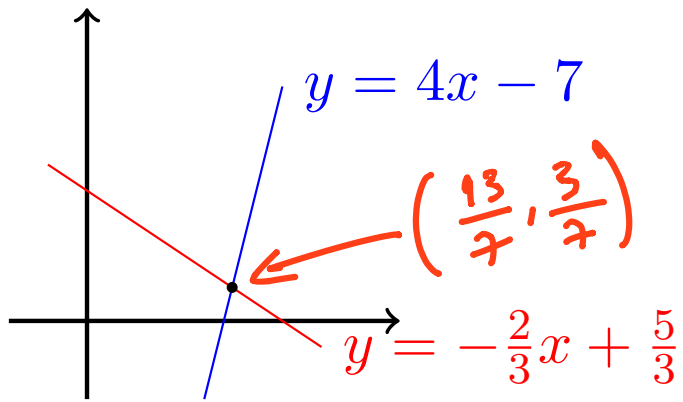
Sistemas Lineares

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

Soluções gerais:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$y = 4x - 7$$



Resolvendo o Sistema

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, \quad y = 4x - 7$$

$$-\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 4x - 7 \Rightarrow 4x + \frac{2}{3}x = \frac{5}{3} + 7$$

$$\Rightarrow \left(\frac{12+2}{3}\right)x = \frac{5+21}{3} \Rightarrow \frac{14}{3}x = \frac{26}{3} \Rightarrow x = \frac{26}{14} = \frac{13}{7}$$

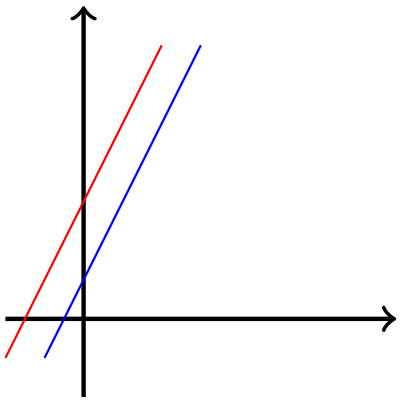
$$y = 4 \cdot \frac{13}{7} - 7 = \frac{52}{7} - 7 = \frac{52-49}{7} = \frac{3}{7}$$

Sistemas Lineares

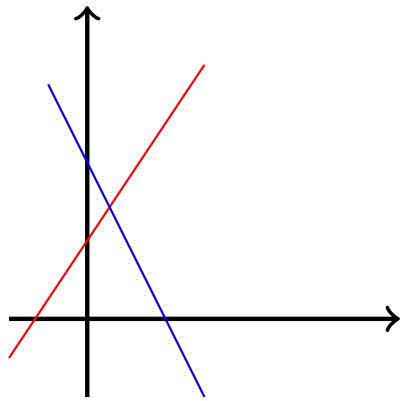
Dado um sistema linear

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

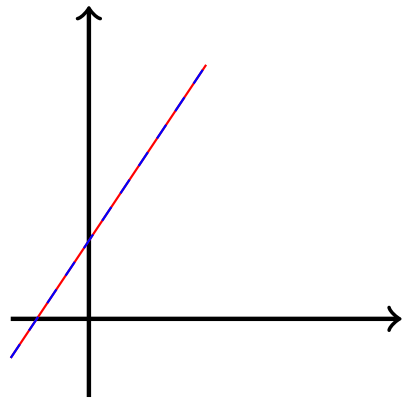
Suas possíveis soluções serão



não há sol.



única sol.



infinitas sol.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$$

Forma Matricial de um Sistema Linear

Um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\underset{3\times 3}{\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}} \underset{3\times 1}{\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}} = \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}$$

$$Ax = b$$

Resolvendo Sistemas Lineares

Resolver um sistema $Ax = b$ significa determinar as entradas da matriz x. Dessa forma, se A tem inversa, uma maneira de resolver um sistema linear é dada por

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

Resolvendo Sistemas Lineares

Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

Forma matricial $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

A inversa de uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ (verifique!)}$$

$\det A = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 4$

$= -2 - 12$

$= -14$

$A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

Resolvendo Sistemas Lineares

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Portanto, a solução do sistema é

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Resolvendo Sistemas Lineares

Mas, inverter matrizes é muito caro! Além disso, esse método só resolve sistemas cuja solução é única.

Vamos utilizar uma estratégia um pouco menos trabalhosa e mais robusta.

Escalonamento

O processo de escalonamento consiste em executar operações elementares sobre as linhas da matriz até que:

- As linhas que contém zeros estão abaixo das demais;
- O primeiro elemento não nulo de uma linha está em uma coluna à direita do elemento não nulo da linha acima.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Aumentada de um Sistema Linear

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

$[A \mid b]$

A matriz aumentada do sistema acima é a matriz composta pelos coeficientes das equações, incluindo o coeficiente independente.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Resolvendo um Sistema Linear com Escalonamento

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ 3y - 11z = -27 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2$:

$2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -3$, $-7 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{2}$, $-17 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{51}{2}$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ -\frac{1}{2}z = -\frac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$\frac{51}{2} - \frac{54}{2}$

Resolvendo um Sistema Linear com Escalonamento

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ -\frac{1}{2}z &= -\frac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow -2L_3$:

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ z &= 3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolvendo um Sistema Linear com Escalonamento

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Escalonando sua matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz escalonada corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ z = 3 \end{cases}$$

$3x + 1 = 5$

$\Rightarrow 3x = 4$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

$x = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow 3x = 4$

$\Rightarrow 3x + 1 = 5$

Resolvendo um Sistema Linear com Escalonamento

Cuja solução é simples

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ z &= 3 \end{cases}$$

$$z = 3$$

$$2y - 21 = -17 \Rightarrow y = 2$$

$$x + 2 + 6 = 9 \Rightarrow x = 1$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

$1 + 2 + 2 \cdot 3 = 9$ ✓

$2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 2 + 8 - 9 = 1$ ✓

$3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 3 + 12 - 15 = 0$ ✓

Resolvendo outro Sistema Linear com Escalonamento

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \\ 9x + 10y + 11z = 12 \end{cases}$$

exercício!

Escalonando

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -4y - 8z = -12 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo outro Sistema Linear com Escalonamento

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 4 \\ -4y - 8z &= -12 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y \Rightarrow x + 2y + 3\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}y\right) = 4 \Rightarrow x + 2y + \frac{9}{2} - \frac{3}{2}y = 4$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x + y = -1 \Rightarrow y = -2x - 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-2x - 1) \Rightarrow z = x + 2$$

Resolvendo outro Sistema Linear com Escalonamento

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 4 \\ -4y - 8z &= -12 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y \Rightarrow x + 2y + 3\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}y\right) = 4 \Rightarrow x + 2y + \frac{9}{2} - \frac{3}{2}y = 4$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x + y = -1 \Rightarrow y = -2x - 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-2x - 1) \Rightarrow z = x + 2$$

$$\therefore \; y = 2x - 1, \quad z = x + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$