Matriz Inversa

Prof. Adriano Barbosa

Matriz Inversa

Definição

Dada uma matriz quadrada A, a matriz inversa, denotada por A^{-1}, é uma matriz tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, onde I é a matriz identidade.

Quando A não possui inversa, dizemos que A é uma matriz singular.

Matriz Inversa

Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sua inversa é dada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} - \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} + \frac{6}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} - \frac{1}{5} & \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} + \frac{6}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Matriz Inversa

Propriedades

1. Se A é uma matriz invertível, então sua inversa é única.
2. Se A e B são invertíveis, então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. A inversa da inversa de uma matriz é a própria matriz: $(A^{-1})^{-1} = A$.
4. A inversa de uma transposta é a transposta da inversa: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. A inversa de uma matriz diagonal é a matriz diagonal dos inversos dos elementos diagonais.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operações Elementares com Linhas de uma Matriz

Operações Elementares

1. Trocar duas linhas.
2. Multiplicar uma linha por um escalar não nulo.
3. Somar um múltiplo de uma linha a outra linha.

Operações Elementares com Linhas de uma Matriz

Exemplo

1. Trocar as linhas:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Multiplicar a primeira linha por 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow 2 \cdot L_1} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Somar a primeira linha multiplicada por 3 à segunda linha:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow 3 \cdot L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Operações Elementares com Linhas de uma Matriz

Exemplo

1. Trocar as linhas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Multiplicar a primeira linha por 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftarrow 2L_1$

3. Somar a primeira linha multiplicada por 3 à segunda linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$

Matrizes Elementares

As operações elementares em linhas de uma matriz podem ser representadas por matrizes elementares. Aqui estão exemplos de matrizes elementares para as três operações:

1. **Trocar duas linhas**:

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \ : \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. **Multiplicar uma linha por um escalar não nulo**:

$$L_1 \leftarrow cL_1 \ : \ \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Somar um múltiplo de uma linha a outra linha**:

$$L_3 \leftarrow cL_2 + L_3 \ : \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes Elementares

Supondo que A seja invertível, como encontrar sua inversa?

Matrizes Elementares

Supondo que A seja invertível, como encontrar sua inversa?

$$
\begin{aligned}
& E_n \cdots E_2 E_1 A = I \\
\Leftrightarrow & E_n \cdots E_2 E_1 A A^{-1} = I A^{-1} \\
\Leftrightarrow & E_n \cdots E_2 E_1 I = A^{-1}
\end{aligned}
$$

Matrizes Elementares

Supondo que A seja invertível, como encontrar sua inversa?

$$\begin{aligned} & E_n \cdots E_2 E_1 A = I \\ \Leftrightarrow & E_n \cdots E_2 E_1 A A^{-1} = I A^{-1} \\ \Leftrightarrow & E_n \cdots E_2 E_1 I = A^{-1} \end{aligned}$$

Basta descobrir qual a sequência de operações elementares necessária para transformar a matriz A na matriz identidade e aplicar a mesma sequência de operações à matriz identidade.

Invertendo Matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \xrightarrow{E_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \xrightarrow{E_3} \begin{bmatrix} A^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ \underline{2} & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{5} & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$=$

Exercício: verificar que encontramos a inversa.

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{8}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ \longrightarrow \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{8} L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{8} L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -2L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{8}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -2L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Invertendo Matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \longrightarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ \longrightarrow \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3 \\ \longrightarrow \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ \longrightarrow \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 7/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right] \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \longrightarrow \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/4 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -3/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$