Produto Cartesiano e Relações Binárias

Prof. Adriano Barbosa

30/10/2024

Par ordenado

Um **par ordenado** é uma coleção de dois elementos (a, b), onde a ordem dos elementos importa. Isso significa que (a, b) é diferente de (b, a) quando $a \neq b$.

- O primeiro elemento a é chamado de **primeira componente** ou **primeira coordenada**.
- O segundo elemento b é chamado de **segunda componente** ou **segunda coordenada**.
- Dois pares ordenados são iguais se suas componentes respectivas são iguais:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d$$

Par ordenado

Exemplos:

1. $(1, 2) \neq (2, 1)$
2. $(\sqrt{4}, \pi^0) = (2, 1)$
3. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{4}\right) = \left(\frac{2}{4}, \frac{1}{2}\right)$

Produto cartesiano

Chamamos de **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B, e denotamos por $A \times B$, o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) onde $a \in A$ e $b \in B$.

Produto cartesiano

Exemplos

1. Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4\}$, então:
   $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$
2. Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{\star, \heartsuit\}$, então:
   $A \times B = \{(a, \star), (a, \heartsuit), (b, \star), (b, \heartsuit), (c, \star), (c, \heartsuit)\}$

Produto cartesiano

Se A e B são conjuntos finitos, com m e n elementos respectivamente, então o produto cartesiano $A \times B$ é finito e possui $m \cdot n$ elementos.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Produto cartesiano

Se A e B são conjuntos finitos, com m e n elementos respectivamente, então o produto cartesiano $A \times B$ é finito e possui $m \cdot n$ elementos.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

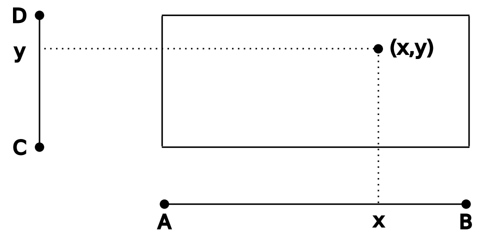
Basta dispor os pares ordenados como uma tabela. Sejam $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$:

	b_1	b_2	$\cdots$	b_n
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	$\cdots$	(a_1, b_n)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	$\cdots$	(a_2, b_n)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	(a_m, b_1)	(a_m, b_2)	$\cdots$	(a_m, b_n)

Produto cartesiano

Mais exemplos

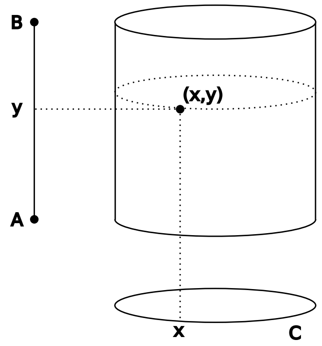
Se AB e CD são segmentos de reta, o produto cartesiano $AB \times CD$ pode ser interpretado como um retângulo.



Produto cartesiano

Mais exemplos

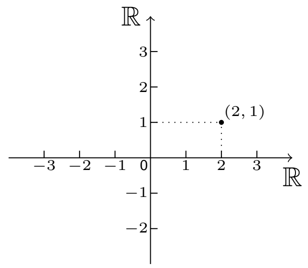
Se AB é um segmento de reta e C uma circunferência, o produto cartesiano $C \times AB$ é um cilindro.



Produto cartesiano

Mais exemplos

O plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ é a representação geométrica do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

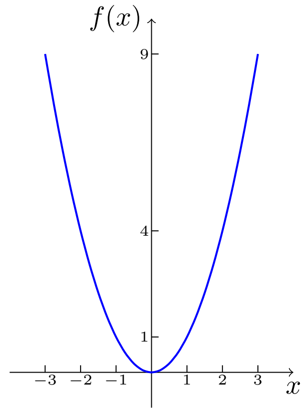


O gráfico de uma função

O gráfico de uma função $f : X \to Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado pelos pares ordenados (x, y), onde x é qualquer elemento de X e $y = f(x)$.

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

O gráfico de uma função



O gráfico de uma função

Para que um subconjunto $G \subset X \times Y$ seja o gráfico de alguma função $f : X \to Y$ é necessário que para cada $x \in X$ exista um, e somente um, $y \in Y$ tal que $(x, y) \in G$.

O gráfico de uma função

Exemplos

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

x	$y = f(x)$
0	$f(0) = 0 + 1 = 1$
7	$f(7) = 7 + 1 = 8$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
-2	$f(-2) = -2 + 1 = -1$

O gráfico de uma função

Exemplos

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

x	$y = f(x)$
0	$f(0) = 0 + 1 = 1$
7	$f(7) = 7 + 1 = 8$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
-2	$f(-2) = -2 + 1 = -1$

Portanto, $(0, 1), (7, 8), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), (-2, -1) \in G(f)$. De modo geral, $(x, x + 1) \in G(f), \forall x \in \mathbb{R}$.

O gráfico de uma função

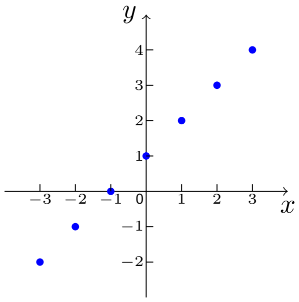
Exemplos

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

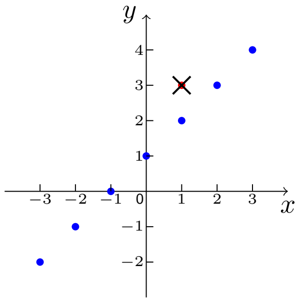
x	$y = f(x)$
0	$f(0) = 0 + 1 = 1$
7	$f(7) = 7 + 1 = 8$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
-2	$f(-2) = -2 + 1 = -1$

Portanto, $(0, 1), (7, 8), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), (-2, -1) \in G(f)$. De modo geral, $(x, x + 1) \in G(f), \forall x \in \mathbb{R}$.
Mas, $(1, 3) \notin G(f)$, pois $f(1) = 2 \neq 3$.

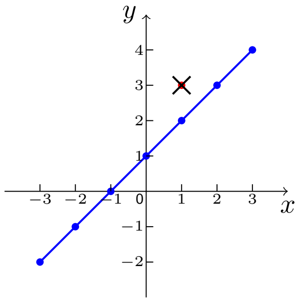
O gráfico de uma função



O gráfico de uma função



O gráfico de uma função



O gráfico de uma função

Exemplos

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.

x	$y = f(x)$
0	$f(0) = 0^2 = 0$
7	$f(7) = 7^2 = 49$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$

O gráfico de uma função

Exemplos

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

x	$y = f(x)$
0	$f(0) = 0^2 = 0$
7	$f(7) = 7^2 = 49$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$

Existe algum par ordenado em $G(f)$ com segunda coordenada negativa?

O gráfico de uma função

Exemplos

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

x	$y = f(x)$
0	$f(0) = 0^2 = 0$
7	$f(7) = 7^2 = 49$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$

Existe algum par ordenado em $G(f)$ com segunda coordenada negativa? Não, pois

$$(x, y) \in G(f) \iff y = f(x) = x^2 \geq 0.$$

Portanto, não existem pontos do gráfico de f abaixo do eixo x.

Relação binária

Uma **relação binária** R sobre dois conjuntos A e B é uma condição ou um conjunto de condições que permitem determinar se $a \in A$ está relacionado ou não com $b \in B$ segundo R.

Relação binária

Exemplos

- Igualdade: $a = b$
- Ordem: $a < b$
- Uma função f: $b = f(a)$
- Relação de parentesco: José é pai de Maria.

Relação binária

Do ponto de vista de conjuntos, uma relação R é um subconjunto de $A \times B$, onde R define um vínculo entre elementos $a \in A$ e elementos $b \in B$.

$$R \subset A \times B$$

Relação binária

Uma relação R é dita:

1. Reflexiva se $(a, a) \in R$;
2. Simétrica se $(a, b) \in R \iff (b, a) \in R$;
3. Transitiva se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$;
4. Antissimétrica se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$.

Relação binária

Dado $A = \{1, 2, 3\}$, a relação "menor do que ou igual" define os seguintes pares ordenados:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}.$$

Relação binária

Dado $A = \{1, 2, 3\}$, a relação "menor do que ou igual" define os seguintes pares ordenados:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}.$$

R é reflexiva, transitiva e antissimétrica.