Conjuntos – parte 2

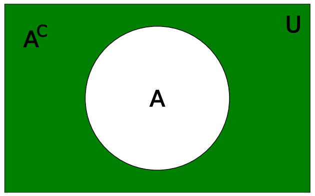
Prof. Adriano Barbosa

23/10/2024

Complementar de um conjunto

Dados o conjunto universo U e um conjunto $A \subset U$, o complementar de A é o conjunto A^C formado pelos elementos de U que não pertencem a A.

Complementar de um conjunto



Complementar de um conjunto

Exemplo

$U = \{1, a, 2, b, \#, @\}$, $A = \{a, b, \#\}$, $B = \{1, a, 2, \#\}$
$\Rightarrow A^C = \{1, 2, @\}$, $B^C = \{b, @\}$

Complementar de um conjunto

Dos princípios do terceiro excluído e da não-contradição, segue-se que:

1. Para todo $A \subset U$, tem-se $(A^C)^C = A$.
   De fato, $x \in (A^C)^C \Leftrightarrow x \notin A^C \Leftrightarrow x \in A$, logo $(A^C)^C = A$.

Complementar de um conjunto

Dos princípios do terceiro excluído e da não-contradição, segue-se que:

1. Para todo $A \subset U$, tem-se $(A^C)^C = A$.
   De fato, $x \in (A^C)^C \Leftrightarrow x \notin A^C \Leftrightarrow x \in A$, logo $(A^C)^C = A$.
2. $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$.
   $(\Rightarrow) x \in B^C \Rightarrow x \notin B \overset{hip.}{\Rightarrow} x \notin A \Rightarrow x \in A^C$
   $(\Leftarrow) x \in A \Rightarrow x \notin A^C \overset{hip.}{\Rightarrow} x \notin B^C \Rightarrow x \in B$

Complementar de um conjunto

Dos princípios do terceiro excluído e da não-contradição, segue-se que:

1. Para todo $A \subset U$, tem-se $(A^C)^C = A$.
   De fato, $x \in (A^C)^C \Leftrightarrow x \notin A^C \Leftrightarrow x \in A$, logo $(A^C)^C = A$.
2. $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$.
   $(\Rightarrow) x \in B^C \Rightarrow x \notin B \overset{hip.}{\Rightarrow} x \notin A \Rightarrow x \in A^C$
   $(\Leftarrow) x \in A \Rightarrow x \notin A^C \overset{hip.}{\Rightarrow} x \notin B^C \Rightarrow x \in B$

2'. $P \Rightarrow Q$ se, e somente se, $\sim Q \Rightarrow \sim P$ (contrapositiva).

Complementar de um conjunto

Cuidado ao fazer a negação!

P: “todo homem é mortal”
~~$\sim P$: “nenhum homem é mortal”~~
$\sim P$: “existe (pelo menos) um homem imortal”

União e interseção

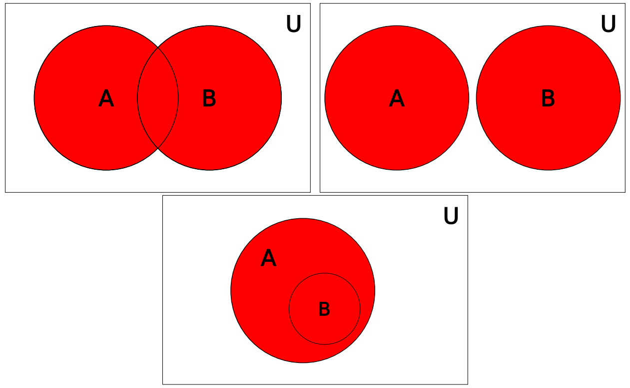
$A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos de A mais os elementos de B.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ **ou** } x \in B$$

x goza da propriedade P **ou** x goza da propriedade Q

ou não é exclusivo!

União e interseção



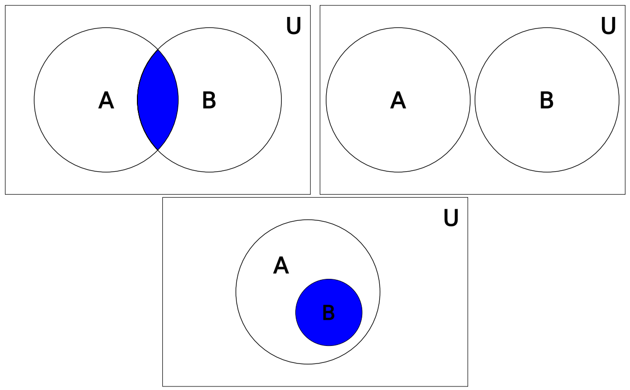
União e interseção

$A \cap B$ é o conjunto formado pelos elementos comuns a A e B.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ **e** } x \in B$$

x goza da propriedade P **e** x goza da propriedade Q

União e interseção



União e interseção

Exemplo

$A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4\}$
$\Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
e $A \cap B = \varnothing$

União e interseção

Exemplo

$A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4\}$
$\Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
e $A \cap B = \varnothing$

Exemplo

$A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 3\}$
$\Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3\}$
e $A \cap B = \{1\}$

União e interseção

Exemplo

$P : x^2 - 3x + 2 = 0,\ Q : x^2 - 5x + 6 = 0$
$A = \{1, 2\},\ B = \{2, 3\}$

União e interseção

Exemplo

$P : x^2 - 3x + 2 = 0,\ Q : x^2 - 5x + 6 = 0$
$A = \{1, 2\},\ B = \{2, 3\}$

x goza da propriedade P ou Q
$\Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3\} \Leftrightarrow x \in A \cup B = \{1, 2, 3\}$

União e interseção

Exemplo

$P : x^2 - 3x + 2 = 0$, $Q : x^2 - 5x + 6 = 0$
$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$

x goza da propriedade P ou Q
$\Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3\} \Leftrightarrow x \in A \cup B = \{1, 2, 3\}$

x goza da propriedade P e $Q \Leftrightarrow x \in \{2\} \Leftrightarrow x \in A \cap B = \{2\}$

União e interseção

Propriedades:

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

União e interseção

Provando que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$:

União e interseção

Provando que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$:

Tome $x \in A \cup (B \cap C)$, logo

$$x \in A \text{ ou } x \in B \cap C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ e } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ ou } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ e } x \in A \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

União e interseção

Provando que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$:

Tome $x \in A \cup (B \cap C)$, logo

$$x \in A \text{ ou } x \in B \cap C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ e } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ ou } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ e } x \in A \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Demonstração das demais propriedades: exercício.

União e interseção

Ligação entre $\cup, \cap$ e $\subset$:

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

Além disso,

$$A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C \text{ e } A \cap C \subset B \cap C$$

De fato,
$x \in A \cup C \Rightarrow x \in A$ ou $x \in C \overset{A \subset B}{\Rightarrow} x \in B$ ou $x \in C \Rightarrow x \in B \cup C$
$x \in A \cap C \Rightarrow x \in A$ e $x \in C \overset{A \subset B}{\Rightarrow} x \in B$ e $x \in C \Rightarrow x \in B \cap C$

Leis de De Morgan

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

De fato,

$$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ e } x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A^C \text{ e } x \in B^C \Leftrightarrow x \in (A^C \cap B^C)$$

Leis de De Morgan

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

De fato,

$$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ e } x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A^C \text{ e } x \in B^C \Leftrightarrow x \in (A^C \cap B^C)$$

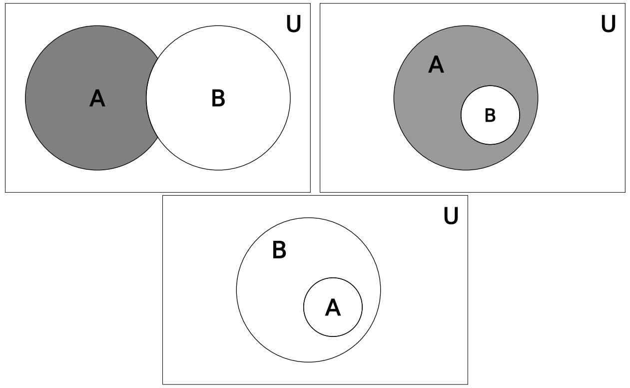
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Exercício.

Diferença entre dois conjuntos

$A - B$ é o conjunto formado pelos elementos de A que não são elementos de B.

Diferença entre dois conjuntos



Diferença entre dois conjuntos

Exemplo

$A = \{3, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 7, 9\}$
$\Rightarrow A - B = \{5, 8\}$, $B - A = \{1, 9\}$
$\therefore A - B \neq B - A$

Diferença entre dois conjuntos

Exemplo

$A = \{3, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 3, 7, 9\}$
$\Rightarrow A - B = \{5, 8\}$, $B - A = \{1, 9\}$
$\therefore A - B \neq B - A$

Exemplo

$U - A = A^C$
$A - \varnothing = A$
$\varnothing - A = \varnothing$