Conjuntos

Prof. Adriano Barbosa

16/10/2024

Conjuntos

Um conjunto é uma coleção de objetos (elementos do conjunto).

Dados um conjunto A e um objeto qualquer a, vale perguntar se a pertence ao conjunto A.

$$a \in A \text{ ou } a \notin A$$

não existe terceira opção!
uma das opções deve valer!

Conjuntos

Um conjunto é uma coleção de objetos (elementos do conjunto).

Dados um conjunto A e um objeto qualquer a, vale perguntar se a pertence ao conjunto A.

$$a \in A \text{ ou } a \notin A$$

não existe terceira opção!
uma das opções deve valer!

$a \in A$ significa que a faz parte da coleção A
$a \notin A$ significa que a não faz parte da coleção A

Conjuntos vs Propriedades vs Condições

$$a \in A \Leftrightarrow a \text{ goza da propriedade } P \Leftrightarrow a \text{ satisfaz a condição } C$$

Conjuntos vs Propriedades vs Condições

$a \in A \Leftrightarrow a$ goza da propriedade $P \Leftrightarrow a$ satisfaz a condição C

Exemplo

$P : x \in \mathbb{Z}$ é par e $A = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
x goza da propriedade $P \Leftrightarrow x \in A$

Conjuntos vs Propriedades vs Condições

$a \in A \Leftrightarrow a$ goza da propriedade $P \Leftrightarrow a$ satisfaz a condição C

Exemplo

$P : x \in \mathbb{Z}$ é par e $A = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$
x goza da propriedade $P \Leftrightarrow x \in A$

Exemplo

$C : y \in \mathbb{R}$ tal que $y^2 - 3y + 2 = 0$ e $B = \{1, 2\}$
y satisfaz a condição $C \Leftrightarrow y \in B$

Conjuntos

Existe uma álgebra: união, interseção e relação de inclusão

Notação:

- $A =$ conjunto dos números pares
- $A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $A = \{$números pares$\}$
- ~~$A = \{$conjunto dos números pares$\}$~~
- $\varnothing =$ conjunto vazio $= \{x \mid x \neq x\}$ (qualquer contradição)
- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, conjunto vazio não é o mesmo que um conjunto que possui como único elemento o conjunto vazio.

Conjunto universo

O conjunto formado por todos os objetos em contexto é chamado de conjunto universo.

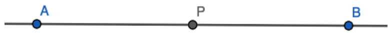
Exemplo

- $x^2 + 1 = 0$
  Se $U = \mathbb{R}$, não existe x que satisfaça a equação.
  Se $U = \mathbb{C}$, $x = i$ é solução da equação.

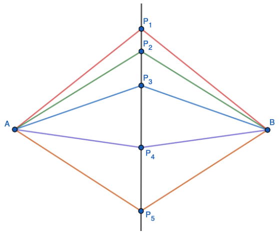
Conjunto universo

Exemplo

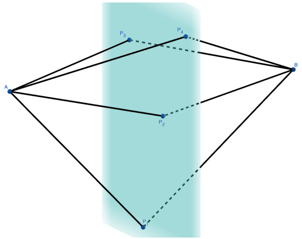
- Pontos que ficam a igual distância de A e B, com $A \neq B$.
  Se U é a reta AB:



Se U é o plano:



Se U é o espaço:



Relação de inclusão

$A \subset B$ significa que:

- se $x \in A$, então $x \in B$
- todo elemento de A também é elemento de B

e dizemos que:

- A é subconjunto de B
- A está contido em B

Relação de inclusão

$A \subset B$ significa que:

- se $x \in A$, então $x \in B$
- todo elemento de A também é elemento de B

e dizemos que:

- A é subconjunto de B
- A está contido em B

Exemplo

1. $\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}$
2. {números pares} $\subset$ {números inteiros}
3. T = conjunto dos triângulos, P = conjunto dos polígonos do plano. $T \subset P$

Relação de inclusão

$A \not\subset B$ significa que:

- existe $x \in A$ tal que $x \notin B$
- algum elemento de A não é elemento de B

Relação de inclusão

$A \not\subset B$ significa que:

- existe $x \in A$ tal que $x \notin B$
- algum elemento de A não é elemento de B

Exemplo

1. $\{-1, -2\} \not\subset \mathbb{N}$
2. $\{4, 5\} \not\subset$ {números pares}
3. $P \not\subset T$. Um quadrado é um polígono, mas não é um triângulo.

Relação de inclusão

Propriedades:

- Reflexividade: $A \subset A$;
- Transitividade: se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Dizemos que $A = B$ quando todo elemento de A também é elemento de B e todo elemento de B também é elemento de A, ou seja, $A \subset B$ e $B \subset A$.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A$$

Relação de inclusão

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 2, 1, 1, 2\}, A = B$?

Relação de inclusão

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 2, 1, 1, 2\}, A = B$?
Sim! Todo elemento de A também é elemento de B e vice-versa.

Relação de inclusão

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 2, 1, 1, 2\}, A = B$?
Sim! Todo elemento de A também é elemento de B e vice-versa.

$A = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| < 2\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x = 0\}, A = B$?

Relação de inclusão

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 2, 1, 1, 2\}, A = B$?
Sim! Todo elemento de A também é elemento de B e vice-versa.

$A = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| < 2\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x = 0\}, A = B$?
Sim! De fato, $A = \{-1, 0, 1\}$ e

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 1$$

Relação de inclusão

Qualquer que seja o conjunto A:

- $A \subset A$. Claramente todo elemento de A pertence a A.
- $\varnothing \subset A$. Se fosse $\varnothing \not\subset A$, teríamos que apresentar $x \in \varnothing$ tal que $x \notin A$, mas $x \in \varnothing$ é impossível.

Relação de inclusão

Quantos subconjuntos um conjunto A possui?

Relação de inclusão

Quantos subconjuntos um conjunto A possui?
Se $A = \varnothing$, único subconjunto: $\varnothing$.
Se $A = \{a\}$, 2 subconjuntos: $\varnothing, \{a\}$.
Se $A = \{a, b\}$, 4 subconjunto: $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$.
Se $A = \{a, b, c\}$, 8 subconjuntos: $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Relação de inclusão

Quantos subconjuntos um conjunto A possui?
Se $A = \varnothing$, único subconjunto: $\varnothing$.
Se $A = \{a\}$, 2 subconjuntos: $\varnothing, \{a\}$.
Se $A = \{a, b\}$, 4 subconjunto: $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$.
Se $A = \{a, b, c\}$, 8 subconjuntos: $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

O conjunto formado pelos subconjuntos de A é chamado de conjunto das partes de A, $\mathcal{P}(A)$.

Relação de inclusão

Se A tem n elementos, $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

Relação de inclusão

Se A tem n elementos, $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.
Indução:

- Base: $A = \varnothing$, $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$. $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$.

Relação de inclusão

Se A tem n elementos, $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.
Indução:

- Base: $A = \varnothing$, $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$. $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$.
- Passo: Ao adicionar um elemento ao conjunto A, temos que todo subconjunto de A (2^n subconjuntos, pela hip. de indução) também será um subconjunto do novo conjunto. Além disso, ao adicionar o novo elemento a cada um dos subconjuntos, temos novos 2^n subconjuntos. Portanto, o total de subconjuntos de A com mais um elemento será $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Relação de inclusão

A relação de inclusão está ligada com a implicação lógica.

Se P e Q são propriedades de um elemento genérico de U (universo), então P e Q definem conjuntos A e B dos elementos de U que gozam das propriedades P e Q, respectivamente.

$P \Rightarrow Q$ é equivalente a dizer que $A \subset B$

Relação de inclusão

Exemplo

U: quadriláteros convexos do plano
P: quadriáteros com os 4 ângulos retos
Q: quadriláteros com lados opostos paralelos
A = conjunto dos retângulos
B = conjunto dos paralelogramos
$P \Rightarrow Q$ é equivalente a $A \subset B$

Relação de inclusão

Exemplo

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x^3 - 7x + 6 = 0$
(todo número que satisfaz a primeira equação também satisfaz a segunda)

$\{1, 2\} \subset \{-3, 1, 2\}$
(o conjunto solução da primeira equação está contido no conjunto solução da segunda equação)

Relação de inclusão

$Q \Rightarrow P$ é a recíproca de $P \Rightarrow Q$

A recíproca dos exemplos anteriores é falsa, pois nem todo paralelogramo é um retângulo e -3 é raiz da segunda equação, mas não é raiz da primeira.

Relação de inclusão

Por outro lado, se P é a propriedade de um triângulo ser retângulo com catetos x e y e hipotenusa z e Q a propriedade de valer $z^2 = x^2 + y^2$, então $P \Leftrightarrow Q$.

Relação de inclusão

Exemplo

$$
\begin{aligned}
& x^2 - 3x + 2 = 0 \\
\Leftrightarrow & (x-1)(x-2) = 0 \\
\Leftrightarrow & x - 1 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow & x = 1 \text{ ou } x = 2 \\
\Leftrightarrow & x \in \{1, 2\}
\end{aligned}
$$

Relação de inclusão

Exemplo

$$
\begin{aligned}
& x^2 + 1 = 0 && \text{(multiplicando por } x^2 - 1) \\
\Rightarrow & x^4 - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow & x^4 = 1 \\
\Leftrightarrow & x \in \{-1, 1\}
\end{aligned}
$$

Relação de inclusão

Exemplo

$$
\begin{aligned}
& x^2 + 1 = 0 && \text{(multiplicando por } x^2 - 1\text{)} \\
\Rightarrow & x^4 - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow & x^4 = 1 \\
\Leftrightarrow & x \in \{-1, 1\}
\end{aligned}
$$

a primeira equação não possui solução real!