Sistemas Lineares – parte 2

Prof. Adriano Barbosa

17/10/2024

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Considere o sistema

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Considere o sistema

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

Caso algum dos coeficientes a, b, c ou d seja zero, por exemplo, $d = 0$, temos

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx = n \end{cases} \Rightarrow x = \frac{n}{c} \quad \text{e} \quad y = \frac{m - ax}{b}$$

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

No caso geral, em que nenhum dos coeficientes é nulo

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

No caso geral, em que nenhum dos coeficientes é nulo

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por d e a segunda por b

$$\begin{cases} adx + bdy = md \\ cbx + dby = nb \end{cases}$$

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

No caso geral, em que nenhum dos coeficientes é nulo

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por d e a segunda por b

$$\begin{cases} adx + bdy = md \\ cbx + dby = nb \end{cases}$$

Subtraindo

$$(ad - bc)x = md - bn \Rightarrow x = \frac{md - bn}{ad - bc} \quad \text{e} \quad y = \frac{m - ax}{b}$$

O sistema tem solução única.

2 / 22

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Observe que só é possível determinar o valor de x se $ad - bc \neq 0$.
Dizemos então que o sistema é **determinado**.

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Observe que só é possível determinar o valor de x se $ad - bc \neq 0$.
Dizemos então que o sistema é **determinado**.

O número

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

determina se o sistema tem solução única ou não.

3 / 22

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Observe que só é possível determinar o valor de x se $ad - bc \neq 0$. Dizemos então que o sistema é **determinado**.

O número

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

determina se o sistema tem solução única ou não.

Podemos concluir que um sistema linear 2×2 tem solução única se, e somente se,

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$$

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Se o sistema não é determinado, ou seja,

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

duas coisas podem ocorrer:

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Se o sistema não é determinado, ou seja,

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

duas coisas podem ocorrer:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{m}{n}$$

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Se o sistema não é determinado, ou seja,

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

duas coisas podem ocorrer:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{m}{n}$$

ou

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{m}{n}$$

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

No primeiro caso,

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{m}{n} = k$$

o sistema correspondente é

$$\begin{cases} ckx + dky = nk \\ cx + dy = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cx + dy = n \\ cx + dy = n \end{cases}$$

ou seja, o sistema tem apenas uma equação e admite infinitas soluções. Dizemos que o sistema é **indeterminado**.

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

No segundo caso,

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{m}{n}$$

observando sua matriz aumentada, temos que

$$\begin{bmatrix} a & b & m \\ c & d & n \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} c & d & n \\ a & b & m \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a}{c} L_1} \begin{bmatrix} c & d & n \\ 0 & b - \frac{ad}{c} & m - \frac{an}{c} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c & d & n \\ 0 & 0 & m - \frac{an}{c} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{n} L_2} \begin{bmatrix} c & d & n \\ 0 & 0 & \frac{m}{n} - \frac{a}{c} \end{bmatrix}$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{cases} cx + dy = n \\ 0x + 0y = \frac{m}{n} - \frac{a}{c} \end{cases}$$

Portanto, o sistema é **impossível**, pois não admite solução.

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Verifique se o sistema é determinado, indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 6x + 9y = 24 \end{cases}$$

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Verifique se o sistema é determinado, indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 6x + 9y = 24 \end{cases}$$

Calculando o determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$$

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Verifique se o sistema é determinado, indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 6x + 9y = 24 \end{cases}$$

Calculando o determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$$

Como as equações são múltiplas,

$$2x + 3y = 8 \xrightarrow{(\times 3)} 6x + 9y = 24$$

o sistema tem apenas uma equação. Portanto, o sistema é indeterminado e possui infinitas soluções.

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Verifique se o sistema é determinado, indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Verifique se o sistema é determinado, indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Observando o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0$$

o sistema é determinado, logo possui uma única solução.

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Verifique se o sistema é determinado, indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Verifique se o sistema é determinado, indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Calculando o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Quando um sistema linear 2×2 tem solução?

Verifique se o sistema é determinado, indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Calculando o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Dividindo a segunda equação por 2, obtemos um sistema impossível

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Um pouco mais sobre o determinante

Se A é invertível,

$$1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Um pouco mais sobre o determinante

Se A é invertível,

$$1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Portanto, se A é invertível, então $\det(A) \neq 0$.

Um pouco mais sobre o determinante

Se A é invertível,

$$1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Portanto, se A é invertível, então $\det(A) \neq 0$.

Será que a recíproca é verdadeira?

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A \text{ invertível?}$$

Um pouco mais sobre o determinante

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Um pouco mais sobre o determinante

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo $\det(B)$ pela segunda linha

$$0 = \det(B) = 1C_{21} + 2C_{22} + 3C_{23}$$

onde, os cofatores de B acima são iguais aos cofatores correspondentes da matriz A.

Um pouco mais sobre o determinante

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo $\det(B)$ pela segunda linha

$$0 = \det(B) = 1C_{21} + 2C_{22} + 3C_{23}$$

onde, os cofatores de B acima são iguais aos cofatores correspondentes da matriz A.

Assim,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & C_{21} & * \\ * & C_{22} & * \\ * & C_{23} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & 0 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Um pouco mais sobre o determinante

Analogamente,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo $\det(B)$ pela terceira linha

$$0 = \det(B) = 1C_{31} + 2C_{32} + 3C_{33}$$

onde, os cofatores de B acima são iguais aos cofatores correspondentes da matriz A.

Assim,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & C_{31} \\ * & * & C_{32} \\ * & * & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Um pouco mais sobre o determinante

Além disso,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & * & * \\ C_{12} & * & * \\ C_{13} & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(A) & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Um pouco mais sobre o determinante

Além disso,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & * & * \\ C_{12} & * & * \\ C_{13} & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(A) & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Um pouco mais sobre o determinante

É possível mostrar que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix}$$

Um pouco mais sobre o determinante

É possível mostrar que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix}$$

Como a matriz A não desempenha nenhum papel especial, o resultado vale para uma matriz A qualquer

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix}$$

Um pouco mais sobre o determinante

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

é a transporta da matriz cujas entradas são os cofatores de A.

Chamamos a matriz acima de **adjunta** de A.

$$\mathrm{Adj}(A) = [C_{ij}]^T$$

Um pouco mais sobre o determinante

A igualdade

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix}$$

pode ser escrita resumidamente como

$$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \det(A) \cdot I = \mathrm{Adj}(A) \cdot A$$

Um pouco mais sobre o determinante

A igualdade

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix}$$

pode ser escrita resumidamente como

$$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \det(A) \cdot I = \mathrm{Adj}(A) \cdot A$$

Se $\det(A) \neq 0$

$$A \cdot \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A) = I = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A) \cdot A$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A)$$

Um pouco mais sobre o determinante

A igualdade

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix}$$

pode ser escrita resumidamente como

$$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \det(A) \cdot I = \mathrm{Adj}(A) \cdot A$$

Se $\det(A) \neq 0$

$$A \cdot \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A) = I = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A) \cdot A$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A)$$

Portanto, se $\det(A) \neq 0$, então A é invertível.

Quando um sistema linear $n \times n$ tem solução única?

Sabemos que um sistema $Ax = b$ com $A_{n \times n}$ invertível é determinado e

$$x = A^{-1}b.$$

Como A^{-1} existe se, e somente se, $\det(A) \neq 0$, um sistema com mesmo número de equações e variáveis tem solução única se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.

E um sistema linear qualquer?

O **posto** de uma matriz $A_{m \times n}$ é igual ao número de linhas não nulas da sua forma escalonada.

E um sistema linear qualquer?

O **posto** de uma matriz $A_{m \times n}$ é igual ao número de linhas não nulas da sua forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto} = 2$$

E um sistema linear qualquer?

O **posto** de uma matriz $A_{m\times n}$ é igual ao número de linhas não nulas da sua forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto} = 2$$

E um sistema linear qualquer?

O **posto** de uma matriz $A_{m\times n}$ é igual ao número de linhas não nulas da sua forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto} = 3$$

E um sistema linear qualquer?

Dado um sistema linear $Ax = b$ qualquer, tem-se que:

- O sistema é impossível quando o posto da matriz aumentada é maior que o posto de A;
- O sistema é determinado quando a matriz A e a matriz aumentada têm ambas posto igual ao número de variáveis do sistema;
- O sistema é indeterminado se o posto de A e da matriz aumentada são iguais e menores que o número de variáveis.

E um sistema linear qualquer?

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E um sistema linear qualquer?

$$\begin{cases} x + 7z = -10 \\ y + 5z = -6 \end{cases}$$

E um sistema linear qualquer?

$$\begin{cases} x + 7z = -10 \\ y + 5z = -6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

E um sistema linear qualquer?

$$\begin{cases} x + 7z = -10 \\ y + 5z = -6 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

Posto de A e da matriz aumentada são iguais a 2. Como as equações têm três variáveis, o sistema é indeterminado.

E um sistema linear qualquer?

$$\begin{cases} x + 7z = -10 \\ y + 5z = -6 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

Posto de A e da matriz aumentada são iguais a 2. Como as equações têm três variáveis, o sistema é indeterminado.

$$x = -10 - 7z \text{ e } y = -6 - 5z, \forall z \in \mathbb{R}$$

E um sistema linear qualquer?

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

E um sistema linear qualquer?

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

E um sistema linear qualquer?

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3]{L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

E um sistema linear qualquer?

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3]{L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

E um sistema linear qualquer?

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3]{L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

O posto de A é 2 e o posto da matriz aumentada é 3. Logo, o sistema é impossível.