Princípio de Indução Finita

Prof. Adriano Barbosa

09/10/2024

Método axiomático

Um conjunto de conceitos primitivos (axiomas ou postulados) é definido e os demais resultados são derivados (e demonstrados) a partir deles.

As proposições provadas são os teoremas e as conclusões imediatas dos teoremas são chamadas corolários e as proposições auxiliares são os lemas.

O conjunto dos números naturais

O conjunto dos números naturais está caracterizado pela palavra “sucessor” (conceito primitivo, portanto, não definido).

Axiomas de Peano:

- todo número natural tem um único sucessor;
- números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
- existe um único número natural, chamado um (1), que não é sucessor de nenhum outro;
- se $X \subset \mathbb{N}$ com $1 \in X$ e o sucessor de todo elemento de X é também um elemento de X, então $X = \mathbb{N}$ (axioma de indução).

O conjunto dos números naturais

O sistema decimal permite representar os números naturais pelos símbolos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

$\mathbb{N}$ representa o conjunto cujos elementos são chamados de números naturais.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots\}$

O Princípio de Indução Finita

Sejam $P(n)$ uma propriedade do número natural n e n' o sucessor de n. Supondo que:

- $P(1)$ é válida;
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ válida $\Rightarrow P(n')$ válida.

Então $P(n)$ é válida qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

O que é o Princípio de Indução Finita?

- Técnica fundamental na matemática.
- Utilizada para provar proposições válidas para todos os números naturais.
- Baseia-se em duas etapas principais:
  - Provar para o menor número natural.
  - Provar que se a proposição é verdadeira para n, então também é verdadeira para $n + 1$.

Importância do Princípio de Indução

- Permite estabelecer resultados de forma rigorosa.
- Ferramenta essencial em raciocínios matemáticos e provas.

Análogo a uma fila de dominós

- Imagine uma fila de peças de dominó dispostas em pé.
- **Base da Indução:** A primeira peça é derrubada.
- **Passo de Indução:** Se uma peça cai, ela derruba a próxima.
- **Conclusão:** Se a primeira peça cai e cada peça derruba a próxima, todas as peças cairão.

Exercício 1

Prova da soma dos n primeiros números naturais:

$$S(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- **Base:** Para $n = 1$, $S(1) = \frac{1(1+1)}{2}$.
- **Hipótese:** Suponha que a afirmação é verdadeira para n.
- **Passo:** Provar que é verdadeira para $n + 1$.

Exercício 1

Verificando para $n = 1$:

$$S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Exercício 1

Verificando para $n = 1$:

$$S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Supondo que

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

mostremos que

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

Exercício 1

De fato,

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Exercício 1

De fato,

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Exercício 2

Prove que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercício 2

Prove que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Caso base:

$$1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

Exercício 2

Prove que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Caso base:

$$1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

Supondo $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, vamos mostrar que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1)]}{6}$

Exercício 2

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right] = (n+1)\left[\frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6}\right]$$

$$= (n+1)\left[\frac{2n^2 + 7n + 6}{6}\right] = (n+1)\left[\frac{(n+2)(2n+3)}{6}\right]$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1)]}{6}$$

Exercício 2

Sabemos onde queremos chegar:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{2n^3 + 7n^2 + 6n + 2n^2 + 7n + 6}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

Exercício 3

Verifique a validade da igualdade

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n+1}$$

Exercício 3

Verifique a validade da igualdade

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n+1}$$

De fato,

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n+1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(2n+1)(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n^2 + 4n + n + 2 + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n^2 + 5n + 3}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(2n+3)(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n+3}{n+2} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+1}$$

Exercício 3

Mas, observando o caso base:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 1}$$

Exercício 3

Mas, observando o caso base:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 1}$$

Portanto, a igualdade não é válida!

Hora de praticar

Utilize o Princípio de Indução Finita para mostrar a validade das afirmações para todo $n \in \mathbb{N}$:

1. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$
2. $(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$
3. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$
4. $n < 2^n$
5. O número de diagonais de um polígono convexo de n lados é $\dfrac{n(n-3)}{2}$.