Sistemas Lineares

Prof. Adriano Barbosa

10/10/2024

Equações Lineares

Uma equação linear é uma equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as variáveis, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os coeficientes das variáveis e b é o coeficiente independente.

Equações Lineares

Exemplos

1. $3x + 4y = 7$
2. $2x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 0$
3. $z = 2x - y \Leftrightarrow 2x - y - z = 0$

Não são lineares

1. $x^2 - y = 0$
2. $2x + 3y + xy = 0$
3. $\sqrt{y} - x = z$

Equações Lineares

Resolver uma equação linear significa encontrar os valores das variáveis que satisfazem a equação.

- $x = 1$ e $y = 1$ é uma solução de $3x + 4y = 7$

Equações Lineares

Resolver uma equação linear significa encontrar os valores das variáveis que satisfazem a equação.

- $x = 1$ e $y = 1$ é uma solução de $3x + 4y = 7$
- $x = \frac{7}{3}$ e $y = 0$ é outra solução de $3x + 4y = 7$

Equações Lineares

Resolver uma equação linear significa encontrar os valores das variáveis que satisfazem a equação.

- $x = 1$ e $y = 1$ é uma solução de $3x + 4y = 7$
- $x = \frac{7}{3}$ e $y = 0$ é outra solução de $3x + 4y = 7$
- $x = 0$ e $y = \frac{7}{4}$ é mais uma solução de $3x + 4y = 7$

Equações Lineares

De modo geral,

$$3x + 4y = 7 \Leftrightarrow 4y = 7 - 3x \Leftrightarrow y = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}x.$$

Equações Lineares

De modo geral,

$$3x + 4y = 7 \Leftrightarrow 4y = 7 - 3x \Leftrightarrow y = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}x.$$

Assim, qualquer par $x \in \mathbb{R}$ e $y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ será solução da equação $3x + 4y = 7$.

Equações Lineares

De modo geral,

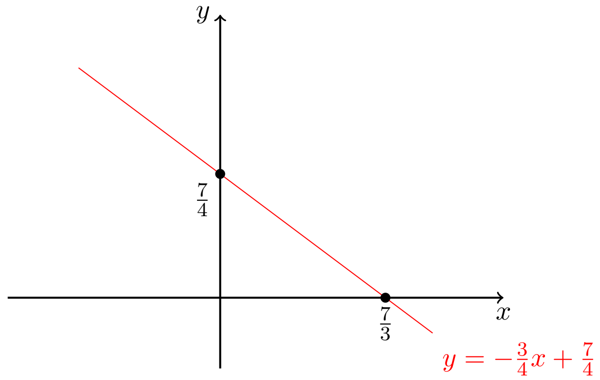
$$3x + 4y = 7 \Leftrightarrow 4y = 7 - 3x \Leftrightarrow y = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}x.$$

Assim, qualquer par $x \in \mathbb{R}$ e $y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ será solução da equação $3x + 4y = 7$.

O conjunto de todas as soluções de uma equação linear é chamado de solução geral da equação.

Equações Lineares

Geometricamente



Equações Lineares

Encontre a solução geral de $3x - 2y + 2z = 1$.

Equações Lineares

Encontre a solução geral de $3x - 2y + 2z = 1$.

$$3x - 2y + 2z = 1 \Leftrightarrow 2z = 1 - 3x + 2y \Leftrightarrow z = \frac{1 - 3x + 2y}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Equações Lineares

Encontre a solução geral de $3x - 2y + 2z = 1$.

$$3x - 2y + 2z = 1 \Leftrightarrow 2z = 1 - 3x + 2y \Leftrightarrow z = \frac{1 - 3x + 2y}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

ou

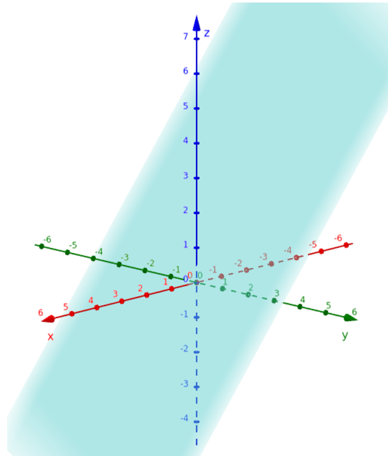
$$3x - 2y + 2z = 1 \Leftrightarrow 2y = 3x + 2z - 1 \Leftrightarrow y = \frac{3x + 2z - 1}{2}, \forall x, z \in \mathbb{R}$$

ou

$$3x - 2y + 2z = 1 \Leftrightarrow 3x = 1 + 2y - 2z \Leftrightarrow x = \frac{1 + 2y - 2z}{3}, \forall y, z \in \mathbb{R}$$

Equações Lineares

$$z = \frac{1 - 3x + 2y}{2}$$



Sistemas Lineares

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares.

Uma solução de um sistema linear é uma lista de valores das variáveis que seja solução de **todas** as equações.

Sistemas Lineares

$$\begin{cases} 4x - y + 3z = -1 \\ 3x + y + 9z = -4 \end{cases}$$

$x = 1$, $y = 2$, $z = -1$ é uma solução do sistema, pois

$$4 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot (-1) = -1$$

$$3 \cdot 1 + 2 + 9 \cdot (-1) = -4$$

Sistemas Lineares

$$\begin{cases} 4x - y + 3z = -1 \\ 3x + y + 9z = -4 \end{cases}$$

$x = 1,\ y = 2,\ z = -1$ é uma solução do sistema, pois

$$4 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot (-1) = -1$$

$$3 \cdot 1 + 2 + 9 \cdot (-1) = -4$$

Mas, $x = 1,\ y = 8$ e $z = 1$ não é solução do sistema

$$4 \cdot 1 - 8 + 3 \cdot 1 = -1$$

$$3 \cdot 1 + 8 + 9 \cdot 1 = 20 \neq -4$$

Sistemas Lineares

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

Soluções gerais:

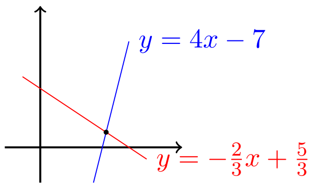
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$
$$y = 4x - 7$$

Sistemas Lineares

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

Soluções gerais:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$
$$y = 4x - 7$$



Resolvendo o Sistema

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}, \quad y = 4x - 7$$

$$-\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 4x - 7 \Rightarrow 4x + \frac{2}{3}x = \frac{5}{3} + 7$$
$$\Rightarrow \left(\frac{12+2}{3}\right)x = \frac{5+21}{3} \Rightarrow \frac{14}{3}x = \frac{26}{3} \Rightarrow x = \frac{26}{14} = \frac{13}{7}$$

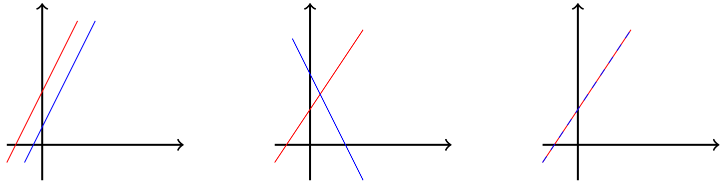
$$y = 4 \cdot \frac{13}{7} - 7 = \frac{52}{7} - 7 = \frac{52-49}{7} = \frac{3}{7}$$

Sistemas Lineares

Dado um sistema linear

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Suas possíveis soluções serão



Forma Matricial de um Sistema Linear

Um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

Resolvendo Sistemas Lineares

Resolver um sistema $Ax = b$ significa determinar as entradas da matriz x. Dessa forma, se A tem inversa, uma maneira de resolver um sistema linear é dada por

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

Resolvendo Sistemas Lineares

Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

Forma matricial $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

A inversa de uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ (verifique!)}$$

Resolvendo Sistemas Lineares

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Portanto, a solução do sistema é

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Resolvendo Sistemas Lineares

Mas, inverter matrizes é muito caro! Além disso, esse método só resolve sistemas cuja solução é única.

Vamos utilizar uma estratégia um pouco menos trabalhosa e mais robusta.

Escalonamento

O processo de escalonamento consiste em executar operações elementares sobre as linhas da matriz até que:

- As linhas que contém zeros estão abaixo das demais;
- O primeiro elemento não nulo de uma linha está em uma coluna à direita do elemento não nulo da linha acima.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Aumentada de um Sistema Linear

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

A matriz aumentada do sistema acima é a matriz composta pelos coeficientes das equações, incluindo o coeficiente independente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo um Sistema Linear com Escalonamento

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$:

$$\begin{cases} x+y+2z &= 9 \\ 2y-7z &= -17 \\ 3y-11z &= -27 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2$:

$$\begin{cases} x+y+2z &= 9 \\ 2y-7z &= -17 \\ -\frac{1}{2}z &= -\frac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Resolvendo um Sistema Linear com Escalonamento

$$\begin{cases} x+y+2z &= 9 \\ 2y-7z &= -17 \\ -\frac{1}{2}z &= -\frac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow -2L_3$:

$$\begin{cases} x+y+2z &= 9 \\ 2y-7z &= -17 \\ z &= 3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolvendo um Sistema Linear com Escalonamento

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$$

Escalonando sua matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A matriz escalonada corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x+y+2z &= 9 \\ 2y-7z &= -17 \\ z &= 3 \end{cases}$$

Resolvendo um Sistema Linear com Escalonamento

Cuja solução é simples

$$\begin{cases} x+y+2z &= 9 \\ 2y-7z &= -17 \\ z &= 3 \end{cases}$$

$$z = 3$$

$$2y - 21 = -17 \Rightarrow y = 2$$

$$x + 2 + 6 = 9 \Rightarrow x = 1$$

Resolvendo outro Sistema Linear com Escalonamento

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \\ 9x + 10y + 11z = 12 \end{cases}$$

Escalonando

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z & = 4 \\ \quad -4y - 8z & = -12 \\ \qquad\qquad 0 & = 0 \end{cases}$$

Resolvendo outro Sistema Linear com Escalonamento

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 4 \\ \quad -4y - 8z & = -12 \\ \qquad\qquad 0 & = 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y \Rightarrow x + 2y + 3\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}y\right) = 4 \Rightarrow x + 2y + \frac{9}{2} - \frac{3}{2}y = 4$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x + y = -1 \Rightarrow y = -2x - 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-2x - 1) \Rightarrow z = x + 2$$

Resolvendo outro Sistema Linear com Escalonamento

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 4 \\ \quad -4y - 8z & = -12 \\ \qquad\qquad 0 & = 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y \Rightarrow x + 2y + 3\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}y\right) = 4 \Rightarrow x + 2y + \frac{9}{2} - \frac{3}{2}y = 4$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x + y = -1 \Rightarrow y = -2x - 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-2x - 1) \Rightarrow z = x + 2$$

$$\therefore\; y = 2x - 1, \quad z = x + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$