Determinantes

Prof. Adriano Barbosa

19/09/2024

Determinantes de Matrizes 2×2

O determinante de uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é definido como:

$$\det(A) = ad - bc.$$

Exemplos de Determinantes

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = (2 \cdot 4) - (3 \cdot 1) = 8 - 3 = 5.$$

Exemplos de Determinantes

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = (2 \cdot 4) - (3 \cdot 1) = 8 - 3 = 5.$$

$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Exemplos de Determinantes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (2 \cdot 4) - (3 \cdot 1) = 8 - 3 = 5.$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = (-1 \cdot 5) - (0 \cdot 2) = -5.$$

Notações para Determinantes

Existem várias notações para representar o determinante de uma matriz. Além da notação $\det(A)$, também é comum encontrar:

- $|A|$ - Barra vertical em torno da matriz.
- $\det A$ - Notação funcional simplificada, sem os parênteses.
- $\det[A]$ - Notação com colchetes.

Todas essas notações referem-se ao mesmo conceito matemático: o determinante de uma matriz.

Propriedades do Determinante

- $\det \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- $\det \begin{bmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & b' \\ c & d \end{bmatrix}$
- $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c + c' & d + d' \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b \\ c' & d' \end{bmatrix}$
- Trocar duas linhas (ou colunas) de posição faz o determinante mudar de sinal.

Propriedades do Determinante

Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, temos $\det(A) = -6$.
Se multiplicarmos a primeira linha de A por 2, obteremos uma nova matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Agora, vamos calcular $\det(B)$:

$$\det(B) = (2 \cdot 6) - (6 \cdot 4) = 12 - 24 = -12 = 2 \cdot \det(A)$$

Propriedades do Determinante

Analogamente, se multiplicarmos a segunda coluna de A por 2, obteremos uma nova matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 3 \\ 4 & 2 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Agora, vamos calcular $\det(B)$:

$$\det(B) = (1 \cdot 12) - (6 \cdot 4) = 12 - 24 = -12 = 2 \cdot \det(A)$$

Propriedades do Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2[(1 \cdot 2) - (2 \cdot 1)] = 0$$

Propriedades do Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2[(1 \cdot 2) - (2 \cdot 1)] = 0$$

De modo geral,

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ a & b \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \lambda(ab - ba) = 0$$

Portanto, se a matriz tem linhas (ou colunas) múltiplas, seu determinante é zero.

Propriedades do Determinante

Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (1 \cdot 4) - (2 \cdot 3) = 4 - 6 = -2$$

$$\det(B) = (5 \cdot 8) - (6 \cdot 7) = 40 - 42 = -2$$

$$\det(A + B) = (6 \cdot 12) - (8 \cdot 10) = 72 - 80 = -8$$

Propriedades do Determinante

Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (1 \cdot 4) - (2 \cdot 3) = 4 - 6 = -2$$
$$\det(B) = (5 \cdot 8) - (6 \cdot 7) = 40 - 42 = -2$$
$$\det(A+B) = (6 \cdot 12) - (8 \cdot 10) = 72 - 80 = -8$$

Portanto, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Propriedades do Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + \lambda c & b + \lambda d \\ c & d \end{vmatrix}$$

Propriedades do Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + \lambda c & b + \lambda d \\ c & d \end{vmatrix}$$

De fato,

$$\begin{vmatrix} a + \lambda c & b + \lambda d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda c & \lambda d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Determinante do Produto de Matrizes

Para duas matrizes quadradas A e B,

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Determinante do Produto de Matrizes

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, temos

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 \\ 1 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 21 & 12 + 24 \\ 5 + 28 & 6 + 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 36 \\ 33 & 38 \end{bmatrix}$$

$$\det(AB) = (31 \cdot 38) - (36 \cdot 33) = -10$$

$$\det(A) = (2 \cdot 4) - (3 \cdot 1) = 5$$

$$\det(B) = (5 \cdot 8) - (6 \cdot 7) = -2$$

Determinante de Matrizes 3×3

Seja A uma matriz 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

O determinante de A é dado por:

$$\det(A) = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Determinante de Matrizes 3×3

Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Temos

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (-11) - (-1) \cdot 8 + 3 \cdot 2 \\ &= -22 + 8 + 6 = -8 \end{aligned}$$

Determinante de Matrizes 3×3

Também podemos usar a primeira coluna.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (-11) - 0 \cdot (-10) + (-2) \cdot (-7) \\ &= -22 + 14 = -8 \end{aligned}$$

Cofator

O cofator C_{ij} de um elemento a_{ij} de uma matriz A é definido como

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}),$$

onde A_{ij} é a matriz resultante de A após remover a i-ésima linha e a j-ésima coluna.

Os sinais dos cofatores podem ser visualizados na matriz

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Cofator

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Expandindo pelas Linhas:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2C_{11} + 0C_{12} + 1C_{13} \\ &= (-1)C_{21} + 3C_{22} + 2C_{23} \\ &= 4C_{31} + 2C_{32} + 0C_{33} \end{aligned}$$

Cofator

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Expandindo pelas Linhas:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2C_{11} + 0C_{12} + 1C_{13} \\ &= (-1)C_{21} + 3C_{22} + 2C_{23} \\ &= 4C_{31} + 2C_{32} + 0C_{33} \end{aligned}$$

Expandindo pelas Colunas:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2C_{11} + (-1)C_{21} + 4C_{31} \\ &= 0C_{12} + 3C_{22} + 2C_{32} \\ &= 1C_{13} + 2C_{23} + 0C_{33} \end{aligned}$$

Cofator

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Escolhendo a segunda coluna:

$$\det(A) = 0C_{12} + 3C_{22} + 2C_{32}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(0-4) - 2(4+1) = -22$$

Determinante de Matrizes $n \times n$

O determinante de uma matriz $A_{n\times n}$ pode ser calculado pela expansão dos cofatores da i-ésima linha:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

onde a_{ij} é o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna de A e C_{ij} é o cofator associado a esse elemento.

Determinante de Matrizes $n \times n$

Analogamente à expansão pelos cofatores da linha i, o determinante de uma matriz $A_{n\times n}$ também pode ser calculado pela expansão dos cofatores da j-ésima coluna:

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

onde a_{ij} é o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna de A e C_{ij} é o cofator associado a esse elemento.

Determinante de Matrizes $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Determinante de Matrizes $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot (-4) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-4) \cdot (3 \cdot 5 - 0 \cdot 0) = -120$$

Propriedades dos Determinantes

1. Trocar as linhas (ou colunas) de uma matriz troca o sinal do determinante.
2. Multiplicar uma linha (ou coluna) por um escalar k multiplica o determinante por k.
3. O determinante de uma matriz é inalterado ao somar um múltiplo de uma linha (ou coluna) a outra linha.
4. Se duas linhas (ou colunas) de uma matriz são iguais, então o determinante é zero.
5. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Propriedades dos Determinantes

Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, temos $\det(A) = 66$. (verifique!)

1. Trocar as linhas de A troca o sinal do determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 0 + 3 \cdot (-22) = -66$$

2. Multiplicar uma linha por 3 multiplica o determinante por 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 12 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} -3 & 12 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 3 \cdot (-66) = 3 \cdot 66$$