Material Teórico - Módulo de INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

A Linguagem dos Teoremas - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antônio Caminha Muniz Neto

12 de maio de 2019

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Tabelas-verdade

Quando construímos proposições compostas, podemos determinar seus valores lógicos a partir dos valores lógicos atribuídos às proposições simples que a forma. Por exemplo, a proposição $R = (p \to q) \vee (\neg p)$ assumirá valor V quando p e q forem ambos verdadeiras. Note ainda que, para cada combinação de valores para p e q, haverá um valor para a proposição R. Podemos listar todas essas combinações construindo uma tabela-verdade seguindo os passos listados abaixo:

1. Primeiramente, verifica-se quantas proposições simples são utilizadas para formular a proposição composta. Se forem utilizadas n proposições simples, a tabela deverá ter 2^n linhas. Cada linha representará uma combinação possível para o conjunto dos valores das proposições simples. Dessa forma, deve-se utilizar as n primeiras colunas para descrever cada uma dessas situações.

2. Em seguida, deve-se utilizar as regras de cada conectivo para determinar os valores das proposições compostas que compõe a proposição final, sempre respeitando a ordem de resolução dada pelos parênteses e pela ordem pré-determinada de relevância dos diferentes conectivos. Observe também que, se uma proposição composta for formada por n proposições simples e m conectivos, então ela deverá ter $n+m$ colunas.

Tomemos como exemplo a construção da tabela-verdade da proposição composta $R = p \to q \wedge r$ (ver Tabela 1).

Tabela 1: Tabela-verdade da proposição $R = p \to q \wedge r$.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \to q \wedge r$
V	V	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	V	F	V
F	F	V	F	V
V	V	F	F	F
F	V	F	F	V
V	F	F	F	F
F	F	F	F	V

Veja que as três primeiras colunas da tabela 1 são reservadas para descrever todas as oito possibilidades de combinação dos valores-verdade para as proposições p, q, r. Como o conectivo $(\wedge)$ tem prioridade em relação ao conectivo $(\to)$, usamos a quarta coluna para descrever os possíveis valores de $q \wedge r$. Por fim, utilizamos a última coluna para descrever os valores de $R = p \to q \wedge r$.

2 Tautologia, contradição e contingência

Quando lidamos com proposições compostas, estas podem ser separadas em três diferentes classes, de acordo com a definição a seguir.

Definição 1. *Uma proposição composta é chamada de* ***tautologia*** *se sempre assume valores lógicos verdadeiros, é chamada de* ***contradição*** *se sempre assume valores lógicos falsos e é chamada de* ***contingência*** *se pode assumir valores lógicos verdadeiros e falsos, dependendo dos valores lógicos das proposições simples que a compõem.*

Um exemplo fundamental de tautologia é aquela que representa o Princípio da Não Contradição, dado por

$$p \vee \neg p.$$

Em palavras, *"Estou vivo ou estou morto"*. Construindo uma tabela-verdade bem simples, temos:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	F	V
F	V	F	V

Outro exemplo de tautologia é *"Se sou feliz e inteligente, então sou feliz ou inteligente"*, o qual pode ser representado por $p \wedge q \to p \vee q$. Veja:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \to p \vee q$
V	V	V	V	V
F	V	V	F	V
V	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Observe que a negação de uma tautologia é uma contradição e que a negação de uma contradição é uma tautologia.

Um exemplo de contingência é dado pela proposição $R = p \to q \wedge r$ que, de acordo com a Tabela 1, pode assumir valores falsos e verdadeiros, a depender dos valores lógicos de p, q, r.

Além dos conceitos de tautologia, contradição e contingência, também devemos aprender a noção de proposições equivalentes:

Definição 2. *Duas proposições P, Q são ditas* ***equivalentes*** *se $P \leftrightarrow Q$ for uma tautologia. Simbolizamos essa propriedade utilizando o símbolo $(\equiv)$, da seguinte forma*

$$P \equiv Q.$$

Em outras palavras, P e Q são equivalentes se possuem colunas exatamente idênticas na tabela-verdade. Tomemos como exemplo a seguinte equivalência:

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

Verificamos que ela realmente é uma equivalência construindo a tabela-verdade:

Tabela 2: Equivalência $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Observe que este exemplo justifica o nome dado ao conectivo "bicondicional". De fato, uma proposição bicondicional é a conjunção de uma proposição condicional com sua recíproca.

Além disso, esta equivalência nos diz que qualquer proposição composta em que há a presença do conectivo $(\leftrightarrow)$ pode ser reescrita utilizando apenas os conectivos $(\neg)$, $(\wedge)$, $(\vee)$ e $(\rightarrow)$.

Outros exemplos notáveis de equivalências lógicas são conhecidos como **Leis de De Morgan** e estão listadas a seguir.

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q);$$
$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q).$$

Assim, a primeira equivalência acima assegura que a negação da proposição "*Ele é feliz e elegante*" é "*Ele não é feliz ou não é elegante*".

Veja que as leis de De Morgan funcionam como a aplicação da propriedade distributiva em expressões algébricas, tendo-se o cuidado de observar que o conectivo $\neg$ muda o sentido de $\wedge$ para $\vee$, e vice-versa.

No quadro a seguir, destacamos algumas equivalências notáveis. Nele, t representa uma tautologia e c uma contradição:

Comutatividades	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Associatividades	$(p \vee q) \vee v \equiv p \vee (q \vee v)$ $(p \wedge q) \wedge v \equiv p \wedge (q \wedge v)$
Distributividades	$p \vee (q \wedge v) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee v)$ $p \wedge (q \vee v) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge v)$
Identidades	$p \wedge t \equiv p$ $p \vee c \equiv p$
Elementos neutros	$p \vee t \equiv t$ $p \wedge c \equiv c$
Contrapositiva	$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

Finalizaremos esta seção com a seguinte definição:

Definição 3. *Dizemos que duas ou mais proposições compostas $P_1, P_2, ..., P_n$ são **inconsistentes** se não podem ser simultaneamente verdadeiras.*

Por exemplo, $p \leftrightarrow q$ e $\neg p \wedge q$ são inconsistentes. De fato, construindo a tabela-verdade, temos:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
V	V	V	F	F
F	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	F	V	V	F

Observe que $\neg p \wedge q$ é verdadeiro apenas quando p é falso e q é verdadeiro. Porém, neste caso, $p \rightarrow q$ é falso.

3 Problemas de revisão

Exemplo 4. *Marque os itens a seguir como verdadeiros ou falsos:*

(a) A proposição $p \rightarrow (\neg p)$ é uma contradição.

(b) A proposição $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ é uma tautologia.

(c) Se as proposições P e Q são ambas verdadeiras, então a proposição $(\neg P) \vee (\neg Q)$ também é verdadeira.

(d) Se as proposições P e Q são ambas verdadeiras e R é falsa, então a proposição $(P \wedge R) \rightarrow (\neg Q)$ é verdadeira.

Solução. (a) Veja a tabela da verdade:

p	$\neg p$	$p \rightarrow (\neg p)$
V	F	F
F	V	V

Logo, a proposição é uma contingência.

(b) Veja a tabela da verdade:

p	q	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
V	V	V	V
F	V	F	V
V	F	V	V
F	F	V	V

Logo, a proposição é uma tautologia.

(c) Se P e Q são verdadeiras, então $\neg P$ e $\neg Q$ são falsas. Logo, $(\neg P) \vee (\neg Q)$ é falsa.

(d) Veja que $P \wedge R$ é falsa. Logo, $(P \wedge R) \rightarrow (\neg Q)$ é verdadeira.

□

Exemplo 5. *Verifique as leis de De Morgan utilizando tabelas-verdade.*

Solução. Vamos construir separadamente as tabelas-verdade para as duas leis.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
V	V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Uma vez que os valores lógicos de $\neg(p \wedge q)$ e $(\neg p) \vee (\neg q)$ são sempre os mesmos, temos a equivalência $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
V	V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Da mesma forma, na tabela acima os valores lógicos de $\neg(p \wedge q)$ e $(\neg p) \vee (\neg q)$ são sempre os mesmos. Assim, temos a equivalência $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$.

□

Exemplo 6. *Mostre que* $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$.

Solução. Uma vez mais, basta construirmos a tabela-verdade e comparar as colunas de $p \to q$ e $\neg p \vee q$:

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$	$p \to q$
V	V	F	V	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	F	V	V	V

□

4 Argumentos lógicos

Como vimos rapidamente no início deste capítulo, um dos objetivos centrais da Lógica é o estudo da validade ou inconsistência de um argumento lógico. De modo informal, podemos dizer que um argumento é um processo no qual relacionamos um conjunto de hipóteses (ou premissas) com uma conclusão. De maneira formal, temos a seguinte

Definição 7. *Um argumento lógico é uma sequência* ***finita*** *de proposições, tais que as iniciais são as* ***premissas*** *e a última é a* ***conclusão****.*

Um exemplo de argumento lógico é o seguinte:

P_1*: João está feliz apenas quando toca violão.*
P_2*: João não está tocando violão.*
Portanto, João não está feliz.

No caso anterior, P_1 e P_2 são as premissas e C : *João não está feliz* é a conclusão. A palavra "*portanto*" é frequentemente substituída pelo símbolo ($\therefore$). Em forma simbólica, o argumento acima pode ser escrito da seguinte maneira

$$P_1;\\ P_2;\\ \therefore C.$$

Por vezes, também denotamos um argumento lógico sob a forma horizontal $(P_1, P_2, ..., P_n \vdash C)$. O símbolo $(\vdash)$ é chamado **traço de asserção** e afirma que a proposição C pode ser deduzida utilizando como premissas as proposições $P_1, P_2, ..., P_n$ que estão à sua esquerda.

Agora, considere o próximo exemplo.

Q_1*: Meu pai se chama João.*
Q_2*: Minha mãe se chama Maria.*
Portanto, meu nome é João Mário.

Veja que, apesar de ter uma estrutura muito semelhante à do exemplo anterior, este argumento nos é intuitivamente estranho. Alguns podem até mesmo afirmar que ele *não faz sentido*. Com o objetivo de formalizar essa discussão, Aristóteles separou os argumentos lógicos em duas classes básicas: argumentos válidos e argumentos inválidos. Para tanto, baseou-se na seguinte

Definição 8. *Dizemos que um argumento lógico* $(P_1, P_2, ..., P_n \vdash C)$ *é* ***válido*** *se a proposição composta* $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \to C$ *é uma tautologia.*

Segundo a definição, um argumento é válido se a verdade das premissas implica necessariamente na verdade da conclusão. Dessa forma, para determinarmos se um argumento é válido, devemos inicialmente construir uma tabela-verdade que contemple as premissas e a conclusão. Em seguida, para que o argumento seja válido, devemos verificar se as linhas nas quais todas as premissas são *simultaneamente* verdadeiras têm conclusão verdadeira. Se ao invés disso, em ao menos uma dessas linhas o valor lógico da conclusão C for falso, então o argumento dado é não válido.

Por exemplo, considere o seguinte argumento, conhecido como **Modus Tollens:**

$$(p \to q, \neg q \vdash \neg p).$$

Fazendo a tabela-verdade, veja que há apenas uma única situação em que ambas premissas são verdadeiras (caso que corresponde à quarta linha na tabela-verdade a seguir) e que, nessa situação, a conclusão também é verdadeira. Portanto, este argumento é válido.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$
V	V	V	F	F
F	V	V	F	V
V	F	F	V	F
F	F	V	V	V

Tabela 3: Analisando um argumento

p	q	v	$\neg v$	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \vee v$	$p \wedge q$
V	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F
V	F	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F
V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F
F	F	F	V	F	F	F

Por outro lado, o argumento $(p \vee q) \vee v, \neg v \vdash p \wedge q$ é inválido. Para verificarmos este fato, façamos a tabela-verdade como mostrado no quadro 3:

Perceba que podemos entender a lógica por trás de um argumento válido da seguinte maneira: se aceitarmos as premissas como verdadeiras, então devemos aceitar a conclusão também como uma proposição verdadeira.

Uma classe de argumentos inválidos que merece atenção especial é a formada pelas chamadas **falácias** ou **sofismas**. São argumentos inválidos, mas construídos de forma a parecerem válidos. Considere o exemplo a seguir:

"Se há carros, então há poluição. Há poluição. Logo, há carros."

Se p significa "há carros" e q significa "há poluição", o argumento acima pode ser escrito em linguagem simbólica na forma $(p \to q, q \vdash p)$.

Para verificar que este argumento é inválido, faremos uso da tabela-verdade:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observe que há uma situação (descrita na terceira linha) em que as premissas são verdadeiras mas a conclusão é falsa (note que, nesse caso, as premissas são $p \to q$ e q). Portanto, trata-se de um argumento inválido, o qual foi construído para parecer verdadeiro.

Exemplo 9. *Verifique se o argumento lógico a seguir, conhecido como **Modus Ponens**, é válido ou inválido:*

$$(p \to q, p \vdash q)$$

Solução. Bastar observar a primeira linha da tabela-verdade a seguir para concluir que, realmente, se trata de um argumento válido.

p	q	$p \to q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

□

Exemplo 10. *A gata de Pedrinho **sempre** espirra antes de uma chuva. Ela espirrou hoje. Pedrinho pensou: "Isso significa que irá chover". Ele está certo?*

Solução. Note que esse exemplo se encaixa no mesmo tipo de sofisma que mencionamos anteriormente:

"Se há carros, então há poluição. Há poluição. Logo, há carros."

Portanto, não é um argumento válido. A palavra sempre, que aparece em destaque, não tem valor lógico nesse exemplo e apenas reforça a aparente veracidade do argumento. □

Exemplo 11. *Mostre que o argumento $(p \to q, q \to r \vdash p \to r)$ é válido.*

Solução. Fazendo a tabela da verdade, verificamos que, quando $p \to q$ e $q \to r$ são simultaneamente verdadeiros, $p \to r$ também é.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$
V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V

□

5 Sugestões ao Professor

Separe dois encontros de 50 minutos para desenvolver o conteúdo deste material. Dedique pelo menos um destes encontros para falar sobre argumentos lógicos e sofismas. Eles servirão de fundamentação teórica para os módulos sobre demonstrações de teoremas.

Referências

[1] Augusto C. Morgado and Benjamin César. *Raciocínio Lógico-Quantitativo*. Elsevier, 2006.

[2] Paulo. Quilelli. *Raciocínio Lógico Matemático*. Editora Ferreira, 2009.

[3] Henrique Rocha. *Raciocínio Lógico: Você Consegue Aprender*. Editora Campus, 2006.