Matriz Inversa

Prof. Adriano Barbosa

05/09/2024

Matriz Inversa

Definição

Dada uma matriz quadrada A, a matriz inversa, denotada por A^{-1}, é uma matriz tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, onde I é a matriz identidade.

Quando A não possui inversa, dizemos que A é uma matriz singular.

Matriz Inversa

Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sua inversa é dada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Propriedades da Matriz Inversa

Propriedades

1. Se A é uma matriz invertível, então sua inversa é única.
2. Se A e B são invertíveis, então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. A inversa da inversa de uma matriz é a própria matriz: $(A^{-1})^{-1} = A$.
4. A inversa de uma transposta é a transposta da inversa: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. A inversa de uma matriz diagonal é a matriz diagonal dos inversos dos elementos diagonais.

Operações Elementares com Linhas de uma Matriz

Operações Elementares

1. Trocar duas linhas.
2. Multiplicar uma linha por um escalar não nulo.
3. Somar um múltiplo de uma linha a outra linha.

Operações Elementares com Linhas de uma Matriz

Exemplo

1. Trocar as linhas:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Multiplicar a primeira linha por 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow 2 \cdot L_1} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Somar a primeira linha multiplicada por 3 à segunda linha:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow 3 \cdot L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Operações Elementares com Linhas de uma Matriz

Exemplo

1. Trocar as linhas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Multiplicar a primeira linha por 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Somar a primeira linha multiplicada por 3 à segunda linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Matrizes Elementares

As operações elementares em linhas de uma matriz podem ser representadas por matrizes elementares. Aqui estão exemplos de matrizes elementares para as três operações:

1. **Trocar duas linhas**:

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \ : \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. **Multiplicar uma linha por um escalar não nulo**:

$$L_1 \leftarrow cL_1 \ : \ \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Somar um múltiplo de uma linha a outra linha**:

$$L_3 \leftarrow cL_2 + L_3 \ : \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes Elementares

Supondo que A seja invertível, como encontrar sua inversa?

Matrizes Elementares

Supondo que A seja invertível, como encontrar sua inversa?

$$
\begin{aligned}
&E_n \cdots E_2 E_1 A = I \\
\Leftrightarrow &E_n \cdots E_2 E_1 A A^{-1} = I A^{-1} \\
\Leftrightarrow &E_n \cdots E_2 E_1 I = A^{-1}
\end{aligned}
$$

Matrizes Elementares

Supondo que A seja invertível, como encontrar sua inversa?

$$
\begin{aligned}
&E_n \cdots E_2 E_1 A = I \\
\Leftrightarrow &E_n \cdots E_2 E_1 A A^{-1} = I A^{-1} \\
\Leftrightarrow &E_n \cdots E_2 E_1 I = A^{-1}
\end{aligned}
$$

Basta descobrir qual a sequência de operações elementares necessária para transformar a matriz A na matriz identidade e aplicar a mesma sequência de operações à matriz identidade.

Invertendo Matrizes

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{8}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{8}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -2L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

Invertendo Matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{8} L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -2L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right]$$