Implicações, sentenças abertas e quantificadores

Prof. Adriano Barbosa

28/08/2024

Tautologia

Dizemos que uma sentença é uma **tautologia** se seu valor lógico é verdadeiro independentemente dos valores lógicos das proposições que a compõem.

Tautologia

Dizemos que uma sentença é uma **tautologia** se seu valor lógico é verdadeiro independentemente dos valores lógicos das proposições que a compõem.

Exemplos:

- $p \vee \sim p$
- $p \to p$
- $p \leftrightarrow p$
- $[(p \to q) \wedge p] \to q$
  A proposição é F se $[(p \to q) \wedge p]$ é V e q é F.
  $[(p \to q) \wedge p]$ é V se $p \to q$ é V e p é V, logo q deve ser V.

Contradições

Uma proposição é uma **contradição** se seu valor é sempre falso, independentemente dos valores de suas componentes.

Contradições

Uma proposição é uma **contradição** se seu valor é sempre falso, independentemente dos valores de suas componentes.

Exemplos:

- $p \wedge \sim p$
- $x = 0 \wedge x = 1$
- $p \leftrightarrow \sim p$
- $x + 4 = x - 1$

Implicações

Dizemos que "p implica q" e escrevemos $p \Rightarrow q$ se $p \rightarrow q$ é uma tautologia. Em outras palavras, quando p for verdadeira, q deve ser obrigatoriamente verdadeira.

Implicações

Dizemos que "p implica q" e escrevemos $p \Rightarrow q$ se $p \rightarrow q$ é uma tautologia. Em outras palavras, quando p for verdadeira, q deve ser obrigatoriamente verdadeira.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Implicações

Dizemos que "p implica q" e escrevemos $p \Rightarrow q$ se $p \rightarrow q$ é uma tautologia. Em outras palavras, quando p for verdadeira, q deve ser obrigatoriamente verdadeira.

Exemplos:

- Se um polígono é um quadrado, então este é um retângulo.
- $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x < 0$ ou $x = 0$ ou $x > 0$.
- $p \Rightarrow p$
- Se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$, então $p \Rightarrow r$.

Implicações

$$2x + 3 = 5 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

Implicações

$$2x + 3 = 5 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 = 4, x > 0 \Rightarrow x = 2$$

Implicações

$$2x + 3 = 5 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 = 4, x > 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x = -1 \Rightarrow x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$$

Equivalências

Quando $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia, dizemos que p é equivalente a q e denotamos por $p \Leftrightarrow q$.

Equivalências

Quando $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia, dizemos que p é equivalente a q e denotamos por $p \Leftrightarrow q$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Equivalências

$$2x + 3 = 5 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$2x + 3 = 5 \Leftarrow 2x = 2 \Leftarrow x = 1$$

Equivalências

$$2x + 3 = 5 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$2x + 3 = 5 \Leftarrow 2x = 2 \Leftarrow x = 1$$

$$x^2 = 4, x > 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x^2 = 4, x > 0 \Leftarrow x = 2$$

Equivalências

$$2x + 3 = 5 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$2x + 3 = 5 \Leftarrow 2x = 2 \Leftarrow x = 1$$

$$x^2 = 4, x > 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x^2 = 4, x > 0 \Leftarrow x = 2$$

$$x = -1 \Rightarrow x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$$

$$x \in \left\{-1, 1, \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right\} \Leftarrow x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$$

Equivalências

$$2x + 3 = 5 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$$x^2 = 4, x > 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$x \in \left\{ -1, 1, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right\} \Leftrightarrow x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$$

Equivalências

Demonstração por absurdo:

$(p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q \to c)$, onde c é uma contradição.

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \wedge \sim q \to c$	$(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q \to c)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Sentenças abertas

Uma **sentença aberta em uma variável** é uma expressão que assume valor V ou F quando atribuimos um valor a sua variável.

Sentenças abertas

Uma **sentença aberta em uma variável** é uma expressão que assume valor V ou F quando atribuimos um valor a sua variável.

Exemplos:

- $p(n)$: n é par.
- $q(x)$: x é racional.
- $r(x)$: $x^2 - 2x + 1 = 0$
- $s(m)$: estou aprovado.

Sentenças abertas

1. $p(x) : x > 1$ e $x \in \mathbb{N}$
   $x \in \{2, 3, 4, \ldots\}$

2. $p(x) : x > 1$ e $x \in \mathbb{R}$
   $x \in (1, \infty)$ (inclui 1,001 e π, por exemplo)

3. $q(x) : x^2 - 1 = 0$ e $x > 0$
   $x = 1$

4. $q(x) : x^2 - 1 = 0$
   $x = 1$ ou $x = -1$

Quantificadores

- $\forall$: quantificador universal, lê-se "para todo".
- $\exists$: quantificador existencial, lê-se "existe".

Quantificadores

- $\forall$: quantificador universal, lê-se "para todo".
- $\exists$: quantificador existencial, lê-se "existe".

Exemplos:

- $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (V)
- $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 1$ (V)
- $2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (F)
- $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $2x + 1 > 0$ (V)

Quantificadores

$$p(x, y) : x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Quantificadores

$$p(x,y) : x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$(x+y)(x-y) = x(x-y)+y(x-y) = x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2$$

Quantificadores

$$p(x,y) : x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$(x+y)(x-y) = x(x-y)+y(x-y) = x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2$$

Desse modo, escrevemos que $p(x,y)$ é verdadeira para todo $x, y \in \mathbb{R}$ para significar que quaisquer (todos) números reais x e y tornam a sentença verdadeira.

Quantificadores

$$q(p): \text{ Se } p \text{ e primo, então } 2^p - 1 \text{ é primo.}$$

Quantificadores

$$q(p): \text{ Se } p \text{ e primo, então } 2^p - 1 \text{ é primo.}$$

$q(2) = 2^2 - 1 = 3, q(3) = 2^3 - 1 = 7, q(5) = 2^5 - 1 = 31$ e $q(7) = 2^7 - 1 = 127$ são verdadeiras.

Quantificadores

$$q(p): \text{ Se } p \text{ e primo, então } 2^p - 1 \text{ é primo.}$$

$q(2) = 2^2 - 1 = 3, q(3) = 2^3 - 1 = 7, q(5) = 2^5 - 1 = 31$ e $q(7) = 2^7 - 1 = 127$ são verdadeiras.

Mas, $q(11) = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$.
Assim, existe um número primo (basta um) tal que $2^p - 1$ não é primo.

Negando quantificadores

- Proposição Universal: $\forall x \in S, p(x)$
- Negação: $\sim(\forall x \in S, p(x))$
- Forma Simplificada: $\exists x \in S, \sim p(x)$

Exemplo:

- Proposição: $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$
- Negação: $\sim(\forall n \in \mathbb{N}, n > 0)$
- Forma Simplificada: $\exists n \in \mathbb{N}, n \leq 0$

Negando quantificadores

- Proposição: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
- Negação: $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0)$

Negando quantificadores

- Proposição: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
- Negação: $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0)$
- Forma Simplificada: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

Negando quantificadores

- Proposição: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
- Negação: $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0)$
- Forma Simplificada: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

- Proposição: "Todos os estudantes passaram no exame."

Negando quantificadores

- Proposição: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
- Negação: $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0)$
- Forma Simplificada: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

- Proposição: "Todos os estudantes passaram no exame."
- Negação: "Nem todos os estudantes passaram no exame."
- Forma Simplificada: "Existe pelo menos um estudante que não passou no exame."

Negando quantificadores

- Proposição: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
- Negação: $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0)$
- Forma Simplificada: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

- Proposição: "Todos os estudantes passaram no exame."
- Negação: "Nem todos os estudantes passaram no exame."
- Forma Simplificada: "Existe pelo menos um estudante que não passou no exame."

- Proposição: "Todas as frutas na fruteira estão maduras."

Negando quantificadores

- Proposição: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
- Negação: $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0)$
- Forma Simplificada: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

- Proposição: "Todos os estudantes passaram no exame."
- Negação: "Nem todos os estudantes passaram no exame."
- Forma Simplificada: "Existe pelo menos um estudante que não passou no exame."

- Proposição: "Todas as frutas na fruteira estão maduras."
- Negação: "Nem todas as frutas na fruteira estão maduras."
- Forma Simplificada: "Existe pelo menos uma fruta na fruteira que não está madura."

Negando quantificadores

- Proposição Existencial: $\exists x \in S, p(x)$
- Negação: $\sim(\exists x \in S\, p(x))$
- Forma Simplificada: $\forall x \in S \sim p(x)$

Exemplo:

- Proposição: $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$
- Negação: $\sim(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 4)$
- Forma Simplificada: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 4$

Negação de Proposições Existenciais

- Proposição: $\exists x \in \mathbb{R}, x$ é negativo
- Negação: $\sim(\exists x \in \mathbb{R}, x$ é negativo)

Negação de Proposições Existenciais

- Proposição: $\exists x \in \mathbb{R}, x$ é negativo
- Negação: $\sim(\exists x \in \mathbb{R}, x$ é negativo)
- Forma Simplificada: $\forall x \in \mathbb{R}, x$ não é negativo

Negação de Proposições Existenciais

- Proposição: $\exists x \in \mathbb{R}, x$ é negativo
- Negação: $\sim(\exists x \in \mathbb{R}, x$ é negativo)
- Forma Simplificada: $\forall x \in \mathbb{R}, x$ não é negativo

- Proposição: "Existe um carro vermelho no estacionamento."

Negação de Proposições Existenciais

- Proposição: $\exists x \in \mathbb{R}, x$ é negativo
- Negação: $\sim(\exists x \in \mathbb{R}, x$ é negativo$)$
- Forma Simplificada: $\forall x \in \mathbb{R}, x$ não é negativo

- Proposição: "Existe um carro vermelho no estacionamento."
- Negação: "Não existe nenhum carro vermelho no estacionamento."
- Forma Simplificada: "Todos os carros no estacionamento são de cor diferente de vermelho."

Negação de Proposições Existenciais

- Proposição: $\exists x \in \mathbb{R}, x$ é negativo
- Negação: $\sim(\exists x \in \mathbb{R}, x$ é negativo$)$
- Forma Simplificada: $\forall x \in \mathbb{R}, x$ não é negativo

- Proposição: "Existe um carro vermelho no estacionamento."
- Negação: "Não existe nenhum carro vermelho no estacionamento."
- Forma Simplificada: "Todos os carros no estacionamento são de cor diferente de vermelho."

- Proposição: "Há alguém na festa que fala francês."

Negação de Proposições Existenciais

- Proposição: $\exists x \in \mathbb{R}, x$ é negativo
- Negação: $\sim(\exists x \in \mathbb{R}, x$ é negativo$)$
- Forma Simplificada: $\forall x \in \mathbb{R}, x$ não é negativo

- Proposição: "Existe um carro vermelho no estacionamento."
- Negação: "Não existe nenhum carro vermelho no estacionamento."
- Forma Simplificada: "Todos os carros no estacionamento são de cor diferente de vermelho."

- Proposição: "Há alguém na festa que fala francês."
- Negação: "Ninguém na festa que fale francês."
- Forma Simplificada: "Todas as pessoas na festa não falam francês."