Transformações e composição de transformações

Prof. Adriano Barbosa

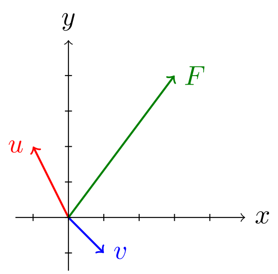
29/08/2024

Vetores

- Um vetor é uma entidade matemática que tem tamanho, sentido e direção.
- Pode ser representado geometricamente por uma seta no espaço.

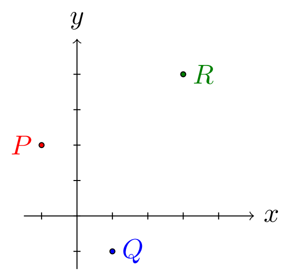
Vetores

- $u = (-1, 2)$
- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $F = 3i + 4j$



Pontos

- $P = (-1, 2)$
- $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $R = 3i + 4j$



Transformações Geométricas no Plano

- As transformações geométricas no plano são operações que modificam a posição, orientação, tamanho ou forma de figuras geométricas.
- Essas transformações podem incluir translação, rotação, reflexão e redimensionamento.
- Cada tipo de transformação tem suas próprias propriedades e efeitos sobre as figuras geométricas.

Como transformar vetores?

Matrizes!

- As transformações podem ser representadas por matrizes, chamadas de matrizes de transformação.
- Essas matrizes são aplicadas a vetores (ou pontos) no plano para realizar as transformações desejadas.

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Transformação de Escala no Plano

A transformação de escala é uma operação que altera o tamanho de uma figura geométrica, aumentando ou diminuindo suas dimensões.

Matriz de Escala:

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix},$$

onde s_x e s_y são os fatores de escala nas direções x e y, respectivamente.

Transformação de Escala no Plano

Para um vetor (x, y), após uma escala de fatores s_x e s_y nas direções x e y, repesctivamente, as novas coordenadas (x', y') podem ser calculadas multiplicando a matriz de escala pelo vetor de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

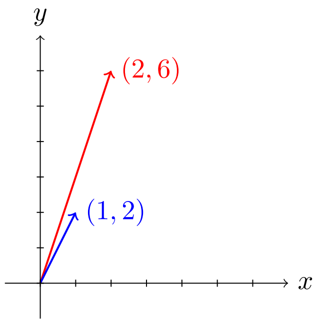
Transformação de Escala no Plano

Exemplo:

Seja $v = (1, 2)$ um vetor no plano. Aplicando uma escala de 2 na direção x e 3 na direção y, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Portanto, o vetor $v = (1, 2)$ após a transformação de escala se torna $v' = (2, 6)$.



Transformação de Escala no Plano

Pada um vetor (x, y) qualquer:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$(x, y) \mapsto (2x, 3y)$$

Transformação de Escala no Plano

Pada um vetor (x, y) qualquer:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$(x, y) \mapsto (2x, 3y)$$

De modo geral,

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{bmatrix}$$

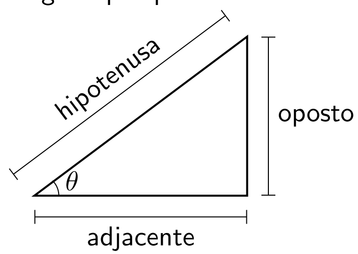
$$(x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y)$$

Relações Trigonométricas

- **Seno:** O seno de um ângulo é definido como a razão entre o comprimento do cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer.
- **Cosseno:** O cosseno de um ângulo é definido como a razão entre o comprimento do cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer.

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\text{oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$



Transformação de Rotação no Plano

A transformação de rotação é uma operação que gira uma figura geométrica em torno de um ponto fixo chamado de centro de rotação. Em um sistema de coordenadas, a rotação pode ser especificada pelo ângulo de rotação e pelo centro de rotação.

Matriz de Rotação:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

onde θ é o ângulo de rotação e o centro de rotação é a origem.

Transformação de Rotação no Plano

Para um vetor (x, y), após a rotação em torno da origem por um ângulo θ, as novas coordenadas (x', y') podem ser calculadas multiplicando a matriz de rotação pelo vetor de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformação de Rotação no Plano

Considere o vetor $(2, 3)$ e uma rotação de 30° em torno da origem. Vamos calcular as novas coordenadas do vetor após a rotação.

Passo 1: Calcular o seno e cosseno:

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

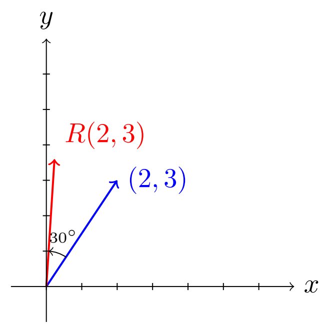
Passo 2: Construir a matriz de rotação:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

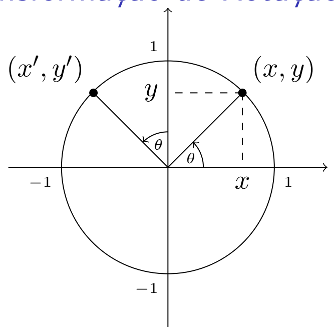
Transformação de Rotação no Plano

Passo 3: Calcular a rotação do vetor $(2, 3)$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\right) + \left(-\frac{1}{2} \cdot 3\right) \\ \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + \sqrt{3} \\ 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$



Transformação de Rotação no Plano

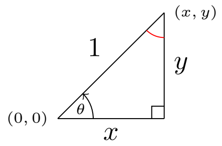


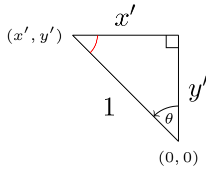
$$\cos(\theta) = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos(\theta)$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \operatorname{sen}(\theta)$$

$$x' = -y = -\operatorname{sen}(\theta)$$

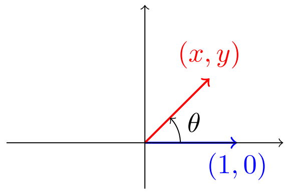
$$y' = x = \cos(\theta)$$





(congruentes pelo caso ALA)

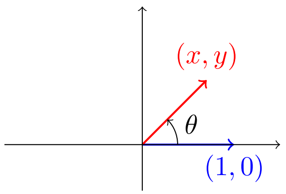
Transformação de Rotação no Plano



$$x = \cos(\theta), y = \operatorname{sen}(\theta)$$

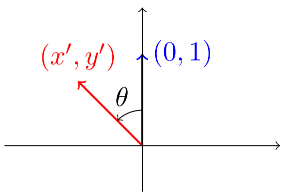
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \end{bmatrix}$$

Transformação de Rotação no Plano



$$x = \cos(\theta), y = \operatorname{sen}(\theta)$$

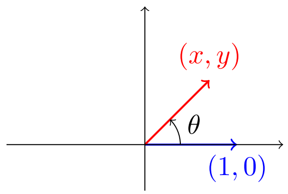
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \end{bmatrix}$$



$$x' = -\operatorname{sen}(\theta), y' = \cos(\theta)$$

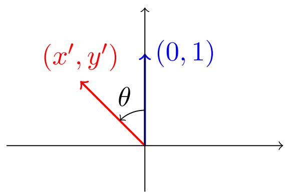
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Transformação de Rotação no Plano



$$x = \cos(\theta), y = \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \end{bmatrix}$$



$$x' = -\operatorname{sen}(\theta), y' = \cos(\theta)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\therefore R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Transformação de Reflexão no Plano

A transformação de reflexão é uma operação que espelha uma figura geométrica em torno de um eixo, chamado eixo de reflexão.

Matriz de Reflexão em relação ao eixo x:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Reflexão em relação ao eixo y:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformação de Reflexão no Plano

Para um vetor (x, y) , após a reflexão em relação a um eixo por exemplo, o eixo x ou y, as novas coordenadas (x', y') podem ser calculadas multiplicando a matriz de reflexão pelo vetor de coordenadas:

Em torno do eixo x:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Em torno do eixo y:

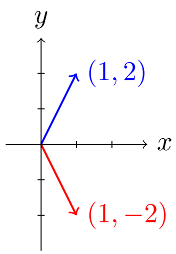
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformação de Reflexão no Plano

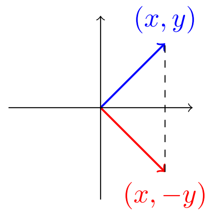
Seja $v = (1, 2)$ um vetor no plano. Aplicando uma reflexão em relação ao eixo x, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Portanto, o vetor $v = (1, 2)$ após a transformação de reflexão em torno do eixo x se torna $v' = (1, -2)$.



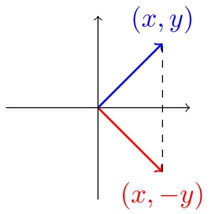
Transformação de Reflexão no Plano



$$(x, y) \mapsto (x, -y)$$

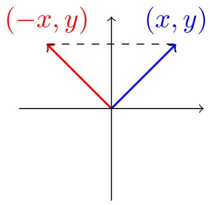
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Transformação de Reflexão no Plano



$$(x, y) \mapsto (x, -y)$$

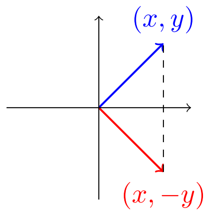
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$



$$(x, y) \mapsto (-x, y)$$

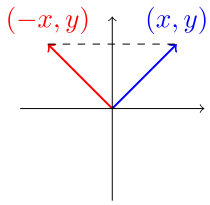
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformação de Reflexão no Plano



$$(x, y) \mapsto (x, -y)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$



$$(x, y) \mapsto (-x, y)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\therefore R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad R_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

20 / 27

Composição de Transformações

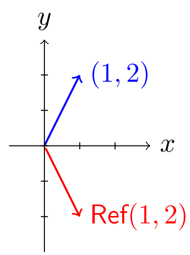
A composição de transformações é uma operação na qual duas ou mais transformações geométricas são combinadas em uma única transformação.

Observação

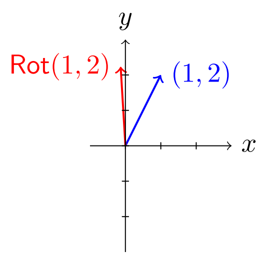
A ordem das transformações na composição é importante e pode alterar o resultado final.

Composição de Transformações

Ref$(1, 2) \approx (1.87, -1.23)$

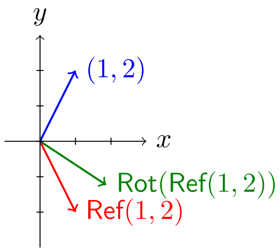


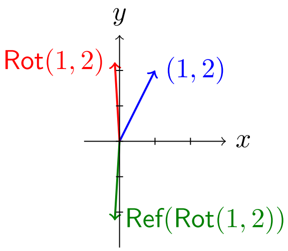
Rot$(1, 2) \approx (-0.13, -2.23)$



Composição de Transformações

$\text{Rot}(\text{Ref}(1,2)) \approx (1.87, -1.23)$ $\text{Ref}(\text{Rot}(1,2)) \approx (-0.13, -2.23)$





Composição de Transformações

Aplicando transformações em sequência a um mesmo ponto:

$$T_2(T_1(x,y))$$

onde

$$T_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad T_2 = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Composição de Transformações

Pela propriedade associativa:

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (T_2 \cdot T_1) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto, a composição de transformações é dada pelo produto das respectivas matrizes na **ordem correta**.

Composição de Transformações

A matriz da transformação que realiza ume rotação de $30°$ em torno na origem seguida de uma reflexão em torno do eixo x é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Enquanto que a matriz da transformação que realiza uma reflexão em torno do eixo x seguida de uma rotação de $30°$ em torno da origem é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Composição de Transformações

Qual a matriz da transformação que leva o vetor $(1,0)$ no vetor $(1,1)$ e o vetor $(0,1)$ no vetor $(-1,1)$? Determine onde o vetor $(2,3)$ é levado por essa transformação.