Proposições e conectivos

Prof. Adriano Barbosa

21/08/2024

Proposições

Uma **proposição** é uma sentença que podemos julgar como verdadeira ou falsa de maneira exclusiva.

Proposições

Uma **proposição** é uma sentença que podemos julgar como verdadeira ou falsa de maneira exclusiva.

1. Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
2. Princípio do terceiro excluído: uma proposição é sempre verdadeira ou falsa e não existe uma terceira opção.

Proposições

Uma **proposição** é uma sentença que podemos julgar como verdadeira ou falsa de maneira exclusiva.

1. Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
2. Princípio do terceiro excluído: uma proposição é sempre verdadeira ou falsa e não existe uma terceira opção.

Denotaremos o valor lógico de uma proposição p por $V(p) = V$ quando p é verdadeira e $V(p) = F$ quando p é falsa.

Proposições

Exemplos:

1. Maceió é a capital de Alagoas. (V)
2. $3 > 0$. (V)
3. Todo quadrado é um retângulo. (V)
4. $x^2 - 3x + 2 = 0$ se, e somente se, $x = 2$ ou $x = 1$. (V)
5. Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 < 0$. (F)

Negação

Negar uma proposição significa inverter seu valor lógico. Denotamos a negativa de p por $\sim p$.

Negação

Negar uma proposição significa inverter seu valor lógico. Denotamos a negativa de p por $\sim p$.

Tabela verdade:

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

Negação

Negar uma proposição significa inverter seu valor lógico. Denotamos a negativa de p por $\sim p$.

Tabela verdade:

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

$$p \equiv \sim(\sim p)$$

Negação

Exemplos:

1. Maceió não é a capital de Alagoas. (F)
2. 3 não é maior que 0. (F)
3. Nem todo quadrado é um retângulo. (F)
4. $x^2 - 3x + 2$ não é igual a zero 0. (F)
5. Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 < 0$. (V)

Negação

Cuidado ao negar uma proposição!

p: João é alto.
~~$\sim p$: João é baixo.~~
$\sim p$: João não é alto.

Negação

Cuidado ao negar uma proposição!

p: João é alto.
~~$\sim p$: João é baixo.~~
$\sim p$: João não é alto.

p: A bola é branca.
~~$\sim p$: A bola é preta.~~
$\sim p$: A bola não é branca.

Negação

Cuidado ao negar uma proposição!

p: João é alto.
~~$\sim p$: João é baixo.~~
$\sim p$: João não é alto.

p: A bola é branca.
~~$\sim p$: A bola é preta.~~
$\sim p$: A bola não é branca.

p: Todo homem é mortal.
~~$\sim p$: Todo homem é imortal.~~
$\sim p$: Nem todo homem é mortal.
$\sim p$: Existe pelo menos um homem imortal.

Conectivos

Sejam

- p: 3 é ímpar.
- q: 4 é par.
- r: 5 é par.
- s: 6 é ímpar.

Usando os conectivos de **conjunção** (e, $\wedge$) e **disjunção** (ou, $\vee$):

- $p \wedge q$: 3 é ímpar e 4 é par.
- $r \vee s$: 5 é par ou 6 é ímpar.
- $\sim r \wedge p$: 5 é ímpar e 3 é ímpar.
- $p \wedge r$: 3 é ímpar e 5 é par.
- $p \vee s$: 3 é ímpar ou 6 é ímpar.
- $r \vee \sim p$: 5 é par ou 3 é par.

Conectivos

Tabela verdade:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Conectivos

Propriedades:

- Comutatividade:
  1. $p \vee q \equiv q \vee p$
  2. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- Associatividade:
  1. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
  2. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
- Distributividade:
  1. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  2. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- Leis de De Morgan:
  1. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
  2. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

Conectivos

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Conectivos

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Exercício: Prove as demais propriedades.

Condicionais

As proposições acima são **proposições condicionais**. Uma proposição condicional é representada por $p \to q$, onde lê-se "se p, então q".

Condicionais

As proposições acima são **proposições condicionais**. Uma proposição condicional é representada por $p \to q$, onde lê-se "se p, então q".

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Condicionais

O único caso que faz a condicional $p \to q$ ser falsa é quando p é verdade e q é falsa.

"Se 5 é par, então eu sei voar."

Ao prometer uma coisa que não é verdade, podemos concluir qualquer coisa!

Condicionais

Exemplos:

- Se 2 é par, então 2^2 é par. (V)
- Se estamos em aula, então vou à praia. (F)
- Se eu tenho 3 m de altura, então o céu é azul. (V)
- Se o mar está seco, então vacas voam. (V)

O condicional estabelece uma relação entre os valores lógicos de p e q, não que q decorre de p.

Condicionais

Observe que:

$$p \to q \equiv \sim p \vee q$$

De fato,

p	q	$\sim p$	$p \to q$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Ou seja, o operador condicional não é uma criação abstrata e sim uma composição de outras operações já conhecidas.

Condicionais

A **proposição bicondicional** é representada por $p \leftrightarrow q$, onde lê-se "p se, e somente se, q" ou "p é condição necessária e suficiente para q".

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Condicionais

Naturalmente,

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

pois

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Condicionais

Dadas as proposições:

- p: Roma fica na Europa.
- q: Campo Grande é a capital do MS.
- r: A neve é quente.
- s: $7 \leq 2$.

Temos:

- $p \leftrightarrow q$ (V)
- $q \leftrightarrow r$ (F)
- $r \leftrightarrow s$ (V)
- $s \leftrightarrow p$ (F)

Condicionais

Também conseguimos escrever o bicondicional como composição de outros operadores:

$$
\begin{aligned}
p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) &\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \\
&\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \text{ (forma conjuntiva)} \\
&\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p) \text{ (forma disjuntiva)}
\end{aligned}
$$