Análise Numérica

Aula 1 — Erro e algoritmo

Prof. Adriano Barbosa

FACET — UFGD

07 de novembro de 2016

Erro de arredondamento e aritmética computacional

Aritmética computacional

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3?$$

Matemática: sim!
Aritmética computacional: não precisamente...

Representação decimal no computador

$$\pm 0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_k \times 10^n$$

com, $1 \leqslant d_1 \leqslant 9$ e $0 \leqslant d_i \leqslant 9, \forall i = 2, \ldots, k$.

Exemplos:

- $\frac{2}{5} = 0.4 \times 10^0$
- $-\frac{5}{2} = -0.25 \times 10^1$
- $\frac{1}{3} = ?$

Arredondamento

$$y = 0.d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} d_{k+2} \ldots \times 10^n$$

Truncamento:

$$fl(y) = 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n$$

Arredondamento: soma $(5 \times 10^{-(k+1)}) \times 10^n$ a y e trunca

$$\begin{cases} \text{se } d_{k+1} \geqslant 5, & \text{soma 1 em } d_k \\ \text{se } d_{k+1} < 5, & \text{trunca} \end{cases}$$

Exemplo

Determine os valores dos cinco primeiros dígitos de π usando truncamento e arredondamento.

$$\pi = 3.14159265\ldots = 0.314159265\ldots \times 10^1$$

Truncamento:

$$fl(\pi) = 0.31415 \times 10^1$$

Arredondamento:

$$fl(\pi) = 0.31416 \times 10^1$$

Erro

Ao aproximar p por $p*$ temos:

Erro absoluto: $|p - p^*|$

Erro relativo: $\dfrac{|p - p^*|}{|p|}$, $(p \neq 0)$

Exemplo

Calcule o erro absoluto e relativo:

$p = 0.3000 \times 10^1$ e $p^* = 0.3100 \times 10^1$

absoluto: $|3 - 3.1| = 0.1$

relativo: $\dfrac{|3 - 3.1|}{|3|} = 0.033\bar{3}$

$p = 0.3000 \times 10^4$ e $p^* = 0.3100 \times 10^4$

absoluto: $|3000 - 3100| = 100$

relativo: $\dfrac{|3000 - 3100|}{|3000|} = 0.033\bar{3}$

Aritmética computacional

Assumindo as operações

$$x \oplus y = fl(fl(x) + fl(y)), \quad x \otimes y = fl(fl(x) \times fl(y)),$$
$$x \ominus y = fl(fl(x) - fl(y)), \quad x \oplus y = fl(fl(x) \div fl(y)).$$

Perda de precisão

Devemos tomar muito cuidado ao efetuar cálculos como:

- Subtração de números muito próximos;
- Divisão por um número muito pequeno;
- Multiplicar por um número muito grande.

Exemplo

Dados $x = \frac{5}{7}$, $u = 0.714251$, $v = 98765.9$ e $w = 0.111111 \times 10^{-4}$, calcule $x \ominus u$, $(x \ominus u) \oplus w$, $(x \ominus u) \otimes v$ e $u \oplus v$ truncando no quinto dígito.

Erro absoluto:

$$
\begin{aligned}
|(x-u)-(x \ominus u)| &= |(x-u)-(fl(fl(x)-fl(u)))| \\
&= \left|\left(\frac{5}{7}-0.714251\right)-\left(fl\left(0.71428 \times 10^{0}-0.71425 \times 10^{0}\right)\right)\right| \\
&= \left|0.347143 \times 10^{-4}-fl\left(0.00003 \times 10^{0}\right)\right| = 0.47143 \times 10^{-5}.
\end{aligned}
$$

Erro relativo:

$$
\left|\frac{0.47143 \times 10^{-5}}{0.347143 \times 10^{-4}}\right| \leq 0.136
$$

Exemplo

Operation	Result	Actual value	Absolute error	Relative error
$x \ominus u$	0.30000×10^{-4}	0.34714×10^{-4}	0.471×10^{-5}	0.136
$(x \ominus u) \oplus w$	0.27000×10^{1}	0.31242×10^{1}	0.424	0.136
$(x \ominus u) \otimes v$	0.29629×10^{1}	0.34285×10^{1}	0.465	0.136
$u \oplus v$	0.98765×10^{5}	0.98766×10^{5}	0.161×10^{1}	0.163×10^{-4}

Exercícios

Veja o exemplo do polinômio $x^2 + 62.10x + 1 = 0$ no livro.

Veja o exemplo da função $f(x) = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5$ no livro.

Algoritmos

```
%
% calcula a soma dos n primeiros numeros naturais
%

% entrada
n = 100;

% inicializacao
soma = 0;

% calculo da soma
for numero = 1:n
    soma = soma + numero;
end

% exibe a soma na tela
disp(soma);
```

Algoritmos

```
%
% soma uma lista de numeros
%

% entrada
numeros = [1, 5, 7, 9, 2, 13, 32, 23, 100];

% inicializacao
soma = 0;

% calculo da soma
for i = 1:length(numeros)
    soma = soma + numeros(i);
end

% exibe a soma na tela
disp(soma);
```