Matrizes

Prof. Adriano Barbosa

08/08/2024

Matrizes

Uma **matriz** é uma estrutura matemática que consiste em uma disposição retangular de números ou símbolos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \pi & 12 \\ 0 & \log 2 \end{bmatrix}$$

Dimensões de uma Matriz

As **dimensões** de uma matriz são determinadas pelo número de linhas e colunas que ela possui. Por exemplo, uma matriz com m linhas e n colunas é chamada de matriz $m \times n$.
Exemplos:

- Uma matriz 3×2:
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$
- Uma matriz 1×3:
$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$$

Matriz Linha e Matriz Coluna

- Uma **matriz linha** é uma matriz com apenas uma linha e várias colunas, ou seja, $1 \times n$.
- Uma **matriz coluna** é uma matriz com apenas uma coluna e várias linhas, ou seja, $m \times 1$.

Exemplo:

- Matriz Linha:
$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$
- Matriz Coluna:
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Matriz Quadrada

Uma **matriz quadrada** é uma matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas, ou seja, $n \times n$.
Exemplo:

- Matriz Quadrada:
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Posição das Entradas e Índices da Matriz

Cada entrada ou elemento em uma matriz é identificada por seus índices de linha e coluna. O elemento na linha i e coluna j é representado como a_{ij}.
Exemplo: Considere a matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Nesta matriz, a_{21} representa o elemento na segunda linha e primeira coluna, ou seja, 1. Da mesma forma, a_{13} representa o elemento na primeira linha e terceira coluna, ou seja, 7.

É comum representar uma matriz com a notação $A = [a_{ij}]$.

Igualdade de Matrizes

Duas matrizes são **iguais** se, e somente se, tiverem o mesmo número de linhas e colunas, e as entradas correspondentes em cada posição forem iguais.
Exemplo: Considere as matrizes A e B abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 5 \\ e^0 & \frac{6}{2} \end{bmatrix}$$

As matrizes A e B são iguais porque têm o mesmo número de linhas e colunas, e suas entradas correspondentes são idênticas.

$a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$

Igualdade de Matrizes

Determine o valor de x para que as matrizes A e B sejam iguais.

$$A = \begin{bmatrix} x-2 & -2 \\ 1 & x^2+2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -x^2 & -2 \\ 1 & 3x \end{bmatrix}.$$

$$x - 2 = -x^2 \Rightarrow x = -2, x = 1$$

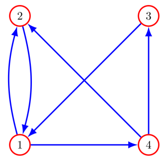
$$x^2 + 2 = 3x \Rightarrow x = 1, x = 2$$

$$x = 1$$

Aplicações

Um **grafo** é uma estrutura matemática que consiste em um conjunto de vértices (ou nós) e um conjunto de arestas (ou conexões) que ligam esses vértices.

Exemplo:



Matriz de Adjacência: representa as conexões entre os vértices do grafo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = 1$, indica uma aresta de i para j

Aplicações

Em **Pocessamento de Linguagem Natural (PLN)**, os documentos podem ser representados como vetores numéricos. Uma maneira comum de fazer isso é através da matriz de termos-documento (ou matriz documento-termo), onde cada linha representa um documento e cada coluna representa um termo, com os valores indicando a frequência ou importância desse termo no documento.

Aplicações

Documentos:

1. "O gato está dormindo no sofá."
2. "O cachorro está brincando no jardim."
3. "O pássaro está voando no céu."

Matriz de Representação:

	brincando	cachorro	céu	dormindo	está	gato	jardim	no	o	pássaro	sofá	voando
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0
2	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
3	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1

Nesta matriz, cada linha representa um documento e cada coluna representa uma palavra. O valor indica a presença (1) ou ausência (0) da palavra no documento.

Aplicações

Uma **imagem** em preto e branco com $M \times N$ pixels é naturalmente representada como uma matriz $M \times N$. O índice da linha i fornece a posição vertical do pixel, o índice da coluna j fornece a posição horizontal do pixel, e a entrada i, j fornece o valor (cor) do pixel.

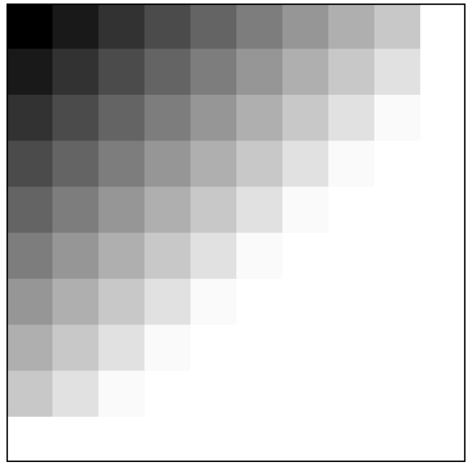
Aplicações

Este é o conteúdo de um arquivo .pgm contendo uma imagem 10x10 em tons de cinza:

```
P2
10 10
255
0 25 50 75 100 125 150 175 200 255
25 50 75 100 125 150 175 200 225 255
50 75 100 125 150 175 200 225 250 255
75 100 125 150 175 200 225 250 255 255
100 125 150 175 200 225 250 255 255 255
125 150 175 200 225 250 255 255 255 255
150 175 200 225 250 255 255 255 255 255
175 200 225 250 255 255 255 255 255 255
200 225 250 255 255 255 255 255 255 255
255 255 255 255 255 255 255 255 255 255
```


Aplicações

O resultado visual:



Matriz Nula

Uma **matriz nula** é uma matriz em que todos os seus elementos são iguais a zero. Ela pode ser representada simbolicamente por 0 ou $0_{m\times n}$, onde m e n são as dimensões da matriz.
Exemplo: A matriz nula 3×3 é representada por:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade

Uma **matriz identidade** é uma matriz quadrada em que todos os elementos na diagonal principal são iguais a 1 e todos os outros elementos são iguais a 0.
Por exemplo, a matriz identidade 3×3 é:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E a matriz identidade 4×4 é:

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ 0, \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Matriz Diagonal

Uma **matriz diagonal** é uma matriz quadrada em que todos os elementos fora da diagonal principal são iguais a zero.
Por exemplo, uma matriz diagonal 3×3 é:

$$D_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrizes Triangulares

- Uma **matriz triangular** é uma matriz quadrada em que todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

Matrizes Triangulares

- Uma **matriz triangular** é uma matriz quadrada em que todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são iguais a zero.
- Uma **matriz triangular inferior** tem todos os elementos acima da diagonal principal iguais a zero, por exemplo:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrizes Triangulares

- Uma **matriz triangular** é uma matriz quadrada em que todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são iguais a zero.
- Uma **matriz triangular inferior** tem todos os elementos acima da diagonal principal iguais a zero, por exemplo:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

- E uma **matriz triangular superior** tem todos os elementos abaixo da diagonal principal iguais a zero, por exemplo:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Transposta

A **transposta** de uma matriz é obtida trocando as linhas pelas colunas. Se A é uma matriz $m \times n$, então a transposta de A, denotada por A^T, é uma matriz $n \times m$.
Por exemplo, considere a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

A transposta de A é:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$[a_{ij}]^T = [a_{ji}]$
$(A^T)^T = A$

Matriz Simétrica

Uma matriz A é **simétrica** se $A = A^T$, ou seja, se for igual à sua transposta.
Exemplo: A matriz abaixo é um exemplo de uma matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = a_{ji}, \forall i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$

Soma de Matrizes

A soma de duas matrizes A e B, denotada por $A + B$, é obtida somando os elementos correspondente das matrizes.
Exemplo: Considere as matrizes A e B abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

A soma das matrizes A e B é dada por:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$

Propriedades da Soma de Matrizes

Propriedades

- **Comutatividade:** $A + B = B + A$
- **Associatividade:** $(A + B) + C = A + (B + C)$
- **Elemento Neutro:** $A + 0 = A$, onde 0 é a matriz nula.
- **Inverso Aditivo:** Para cada matriz A, existe uma matriz $-A$ tal que $A + (-A) = 0$.
- **Transposta da soma:** $(A + B)^T = A^T + B^T$

Produto de Matriz por um Escalar

O produto de uma matriz A por um escalar α, denotado por αA, é obtido multiplicando cada elemento da matriz A pelo escalar α.
Exemplo: Considere a matriz A e o escalar α abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha = 2$$

O produto da matriz A por 2 é dado por:

$$2A = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Propriedades do Produto de Matriz por um Escalar

Propriedades

Dados escalares α, $\beta \in \mathbb{R}$:

- **Associatividade:** $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- **Distributividade sobre a Adição de Escalares:** $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- **Distributividade sobre a Adição de Matrizes:** $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- **Multiplicação por Zero:** $0A = 0$
- **Multiplicação por Um:** $1A = A$
- **Transporta do Produto por Escalar:** $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

Produto de Matrizes

O produto de duas matrizes A e B é definido apenas se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Se A é uma matriz $m \times n$ e B é uma matriz $n \times p$, o produto $C = AB$ é uma matriz $m \times p$.
A entrada c_{ij} de C é a soma cujas parcelas são os produtos das entradas correspondentes da linha i de A com a coluna j de B.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

O produto $C = AB$ é:

$$C = \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 \\ 1 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 36 \\ 33 & 38 \end{bmatrix}$$

Produto de Matrizes

Exemplo:

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Determine AB.

$$AB = \begin{bmatrix} 2(-2) + (-1)(1) \\ 3(-2) + 4(1) \\ 0(-2) + 1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 - 1 \\ -6 + 4 \\ 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades do Produto de Matrizes

Propriedades:

- **Associatividade:** Para matrizes A, B e C tais que as dimensões são compatíveis, temos:

$$(AB)C = A(BC)$$

- **Distributividade:** Para matrizes A, B e C de dimensões compatíveis, temos:

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

- **Transposta do Produto:** $(AB)^T = B^T A^T$

Propriedades do Produto de Matrizes

Propriedades:

- É possível que $AB \neq BA$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- É possível $AB = 0$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Traço de uma Matriz

O **traço** de uma matriz quadrada A, denotado por $\text{tr}(A)$, é a soma dos elementos da diagonal principal de A.
Exemplo:

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -16 \\ 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$. O traço de A é:

$$\text{tr}(A) = 1 + 5 + 9 = 15$$

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $n \times n$, então o traço de A é dado por:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$